Résumé du chapitre 30: espaces vectoriels

Table des matières

1 Espace vectoriel (ev)

1.a Définition

1.b Exemples

1.c Propriétés algébriques

2 Familles finies de vecteurs

3 Sous-espace vectoriel (sev)

3.a Définition

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev.
On appelle sev de E tout ensemble F tel que :
- $F \subset E$
- $\forall (x, y) \in F^2$, $x + y \in F$ (F est stable pour la somme)
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in F, \lambda \cdot x \in F$ (F est stable pour la multiplication par un scalaire)
- $\forall x \in F, -x \in F$ (F est stable par passage à l'opposé)
- $0_E \in F$

Dans ce cas, F muni des loi induites par $+$ et $\cdot$ est un $\mathbb{K}$-ev.

Proposition (Raccourci pour montrer que F est un sev de E).

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F un ensemble. On suppose que :
- $F \subset E$
- $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \forall(x,y) \in F^2, \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F$
  (F est stable par combinaison linéaire de deux vecteurs)
- $0_E \in F$

Alors F est un sev de E

3.b Sev engendré par une famille finie de vecteurs

Définition-Propriété.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit $\mathcal{F} = (x_1, ..., x_n)$ une famille de vecteurs de E.
On note $Vect(x_1, ..., x_n)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $x_1, ..., x_n$.
$(Vect(x_1, ..., x_n) = \{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot x_k | (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\})$
$Vect(x_1, ..., x_n)$ est un sev de E.
On dit que $Vect(x_1, ..., x_n)$ est le sev de E engendré par les vecteurs $x_1, ..., x_n$.

Démonstration.
- $Vect(x_1, ..., x_n) \subset E$
- Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. Soit $(x,y) \in Vect(x_1, ..., x_n)^2$. Montrons que $\lambda \cdot x + \mu \cdot y \in Vect(x_1, ..., x_n)$.
  $x \in Vect(x_1, ..., x_n)$ donc il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot x_k$
  $y \in Vect(x_1, ..., x_n)$ donc il existe $(\mu_1, ..., \mu_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $y = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \cdot x_k$
  $\lambda \cdot x + \mu \cdot y = \lambda \cdot (\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot x_k) + \mu \cdot (\sum_{k=1}^{n} \mu_k \cdot x_k) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda \cdot (\lambda_k \cdot x_k) + \mu \cdot (\mu_k \cdot x_k)) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda\lambda_k + \mu\mu_k) \cdot x_k$.
  Pour tout $k \in [[1, n]]$, posons $\alpha_k = \lambda\lambda_k + \mu\mu_k$
  $\lambda \cdot x + \mu \cdot y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot x_k$ donc $\lambda \cdot x + \mu \cdot y \in Vect(x_1, ..., x_n)$.
- Montrons que $0_E \in Vect(x_1, ..., x_n)$.
  Pour tout $k \in [[1, n]]$, posons $\lambda_k = 0$. $0_E = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot x_k$. Donc $0_E \in Vect(x_1, \dots, x_n)$

Donc $Vect(x_1, ..., x_n)$ est un sev de E.

□

Proposition.

Le sev engendré par une famille finie de vecteurs est invariant opération élémentaire.

3.c Opérations sur les sev

Proposition.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit F et G des sev de E. Alors $F \cap G$ est un sev de E.

Définition-Propriété.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit F et G des sev de E.
On pose $F+G=\{x_1+x_2|(x_1,x_2)\in F\times G\}$.
$F+G$ est un sev de E.
On dit que $F+G$ est la somme de F et G.

Démonstration.
- $F+G\subset E$
- Soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$. Soit $(x,y)\in(F+G)^2$. Montrons que $\lambda\cdot x+\mu\cdot y\in F+G$.
  $x\in F+G$ donc il existe $(x_1,x_2)\in F\times G$ tel que $x=x_1+x_2$.
  $y\in F+G$ donc il existe $(y_1,y_2)\in F\times G$ tel que $y=y_1+y_2$.
  $\lambda\cdot x+\mu\cdot y=\lambda\cdot(x_1+x_2)+\mu\cdot(y_1+y_2)=(\lambda\cdot x_1+\mu\cdot y_1)+(\lambda\cdot x_2+\mu\cdot y_2)$
  $\lambda\cdot x_1+\mu\cdot y_1\in F$ car $(x_1,y_1)\in F^2$ et F est un sev de E
  $\lambda\cdot x_2+\mu\cdot y_2\in G$ car $(x_2,y_2)\in G^2$ et G est un sev de E
  Posons $z_1=\lambda\cdot x_1+\mu\cdot y_1$ et $z_2=\lambda\cdot x_2+\mu\cdot y_2$.
  $\lambda\cdot x+\mu\cdot y=z_1+z_2$ et $(z_1,z_2)\in F\times G$ donc $\lambda\cdot x+\mu\cdot y\in F+G$.
- Montrons que $0_E\in F+G$
  $0_E=0_E+0_E$. $0_E\in F$ car F sev de E. $0_E\in G$ car G sev de E.
  En prenant $x_1=0_E$ et $x_2=0_E$, on obtient $0_E=x_1+x_2$ et $(x_1,x_2)\in F\times G$. Donc $0_E\in F+G$.

Donc $F+G$ est un sev de E.

□

4 Familles libres, familles génératrices et bases

4.a Famille libre

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit $\mathcal{F}=(x_1,x_2,..,x_n)$ une famille de vecteurs de E.
On dit que $\mathcal{F}$ est libre (ou que les vecteurs x_1,...,x_n sont linéairement indépendants) ssi :
$\forall(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\ \lambda_1\cdot x_1+\lambda_2\cdot x_2+...\lambda_n\cdot x_n=0_E\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_n=0$
On dit que $\mathcal{F}$ est liée (ou que les vecteurs x_1,...,x_n sont linéairement dépendants) ssi $\mathcal{F}$ n'est pas libre ssi :
$\exists(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\ \lambda_1\cdot x_1+\lambda_2\cdot x_2+...+\lambda_n\cdot x_n=0_E$ et $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ ne sont pas tous nuls

Proposition.

Une famille de vecteurs est liée ssi au moins un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Proposition.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit $\mathcal{F}=(x_1,...,x_n)$ une famille de vecteurs de E.
$\mathcal{F}$ est libre
$\Leftrightarrow\forall(\lambda_1,...,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\forall(\mu_1,...,\mu_n)\in\mathbb{K}^n,$
$\lambda_1\cdot x_1+...+\lambda_n\cdot x_n=\mu_1\cdot x_1+...+\mu_n\cdot x_n\Rightarrow(\lambda_1,..,\lambda_n)=(\mu_1,...,\mu_n)$
(lorsqu'un vecteur s'écrit sous la forme d'une combinaison linéaires des vecteurs x_1,...,x_n, les scalaires sont uniques)

Démonstration. Montrons "$\Leftarrow$". Supposons $\forall(\lambda_1,...,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\forall(\mu_1,...,\mu_n)\in\mathbb{K}^n,\lambda_1\cdot x_1+...+\lambda_n\cdot x_n=\mu_1\cdot x_1+...+\mu_n\cdot x_n\Rightarrow(\lambda_1,..,\lambda_n)=(\mu_1,...,\mu_n)$. Montrons que $\mathcal{F}$ est libre. Soit $(\lambda_1,...,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$.

On suppose que $\lambda_1 \cdot x_1 + ... + \lambda_n \cdot x_n = 0_E$. $\lambda_1 \cdot x_1 + ... + \lambda_n \cdot x_n = 0 \cdot x_1 + ... + 0 \cdot x_n$ donc par unicité $(\lambda_1, ..., \lambda_n) = (0, ..., 0)$. Donc $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$. Donc $\mathcal{F}$ est libre. Nous avons montré "$\Leftarrow$".

Montrons "$\Rightarrow$". Supposons que $\mathcal{F}$ est libre. Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(\mu_1, ..., \mu_n) \in \mathbb{K}^n$. On suppose $\lambda_1 \cdot x_1 + ... + \lambda_n \cdot x_n = \mu_1 \cdot x_1 + ... + \mu_n \cdot x_n$. Alors $(\lambda_1 - \mu_1) \cdot x_1 + ... + (\lambda_n - \mu_n) \cdot x_n = 0_E$. Or $\mathcal{F}$ est libre. Donc $\lambda_1 - \mu_1 = ... = \lambda_n - \mu_n = 0$. Donc $\lambda_1 = \mu_1, ..., \lambda_n = \mu_n$. Donc $(\lambda_1, .., \lambda_n) = (\mu_1, ..., \mu_n)$. Nous avons montré "$\Rightarrow$".

Par double implication, nous avons montré l'équivalence.

$\square$

Proposition.

Toute sur-famille d'une famille liée est liée.
Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

4.b Famille génératrice

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit $\mathcal{F} = (x_1, ..., x_n)$ une famille de vecteurs de E.
On dit que la famille $\mathcal{F}$ est génératrice de E (ou que les vecteurs $x_1, ..., x_n$ engendrent E) ssi :
$\forall x \in E, \exists (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + ... + \lambda_n \cdot x_n$
(tout vecteur de E s'écrit sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs $x_1, ..., x_n$)

Proposition.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit $\mathcal{F} = (x_1, ..., x_n)$ une famille de vecteurs de E.
$\mathcal{F}$ est génératrice de $E \Leftrightarrow E = Vect(x_1, ...x_n)$

Proposition.

Toute sur-famille d'une famille génératrice d'un ev est génératrice de cet ev.

4.c Base

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit $\mathcal{F} = (x_1, ..., x_n)$ une famille de vecteurs de E.
On dit que $\mathcal{F}$ est une base de E ssi :
$\forall x \in E, \exists! (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \lambda_1 \cdot x_1 + ... + \lambda_n \cdot x_n$
(tout vecteur vecteur de E s'écrit de manière unique sous la forme d'une combinaison linéaire de $x_1, .., x_n$)
Dans ce cas, les coordonnées d'un vecteur $x \in E$ dans la base $\mathcal{F}$ sont les uniques scalaires $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tels que $x = \lambda_1 \cdot x_1 + ... + \lambda_n \cdot x_n$.

Proposition.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit $\mathcal{F} = (x_1, ..., x_n)$ une famille de vecteurs de E.
$\mathcal{F}$ est une base de $E \Leftrightarrow \mathcal{F}$ est libre et génératrice de E

5 Sevs engendrant l'ev, sevs en somme directe, sevs supplémentaires

5.a Sevs engendrant l'ev

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit F et G des sev de E.
On dit que F et G engendrent E ssi :
$\forall x \in E, \exists (x_1, x_2) \in F \times G, x = x_1 + x_2$
(tout élément de E s'écrit sous la forme d'une somme d'un élément de F et d'un élément de G)

Proposition.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit F et G des sev de E.
F et G engendrent $E \Leftrightarrow E = F + G$

5.b Sevs en somme directe

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit F et G des sev de E.
On dit que F et G sont en somme directe et on note $F + G = F \oplus G$ ssi :
$\forall (x_1, x_2) \in F \times G, \forall (y_1, y_2) \in F \times G, x_1 + x_2 = y_1 + y_2 \Rightarrow (x_1, x_2) = (y_1, y_2)$
(lorsqu'un vecteur s'écrit sous la forme d'une somme d'un élément de F et d'un élément de G cette écriture est unique)

Proposition.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit F et G des sev de E.
F et G sont en somme directe $\Leftrightarrow F \cap G = \{0_E\}$

Démonstration. Montrons "$\Rightarrow$". Supposons F et G en somme directe. L'inclusion $\{0_E\} \subset F \cap G$ est évidemment toujours vérifiée. Montrons que $F \cap G \subset \{0_E\}$. Soit $x \in F \cap G$. $x + 0_E = 0_E + x$ et $(x, 0_E) \in F \times G$ et $(0_E, x) \in F \times G$ donc par unicité $(x, 0_E) = (0_E, x)$ donc $x = 0_E$. Donc $F \cap G \subset \{0_E\}$. Par double-inclusion, $F \cap G = \{0_E\}$. Nous avons montré "$\Rightarrow$".

Montrons "$\Leftarrow$". Supposons $F \cap G = \{0_E\}$. Soit $(x_1, x_2) \in F \times G$ et $(y_1, y_2) \in F \times G$. On suppose $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$. $x_1 - y_1 = y_2 - x_2$. $x_1 - y_1 \in F$ car $x_1 \in F$, $y_1 \in F$ et F sev de E. $y_2 - x_2 \in G$ car $x_2 \in G$, $y_2 \in G$ et G sev de E. $x_1 - y_1 = y_2 - x_2 \in F \cap G$ et $F \cap G = \{0_E\}$ donc $x_1 - y_1 = y_2 - x_2 = 0_E$ donc $x_1 = y_1$ et $x_2 = y_2$ donc $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$. Donc F et G sont en somme directe. Nous avons montré "$\Leftarrow$".

Par double implication, nous avons montré l'équivalence. □

5.c Sevs supplémentaires

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit F et G des sev de E.
On dit que F et G sont supplémentaires dans E et on note $E = F \oplus G$ ssi :
$\forall x \in E, \exists! (x_1, x_2) \in F \times G, x = x_1 + x_2$
(tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G)

Proposition.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit F et G des sev de E.
$E = F \oplus G \Leftrightarrow E = F + G \, et \, F \cap G = \{0_E\}$.