Résumé du chapitre 33: applications lineaires

Table des matières

1 Définition

Définition.

Soit E et F des $\mathbb{K}$-ev. Soit $f : E \to F$.
On dit que f est linéaire ssi :
- $\forall (x, y) \in E^2$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$ (f respecte la somme)
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$ (f respecte la multiplication par un scalaire)
- $\forall x \in E$, $f(-x) = -f(x)$ (f respecte l'opposé)
- $f(0_E) = 0_F$ (f respecte le neutre)

Proposition (Raccourci pour montrer qu'une application est linéaire)**.**

Soit E et F des $\mathbb{K}$-ev. Soit $f : E \to F$.
On suppose que pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et tout $(x, y) \in E^2$, $f(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot f(y)$.
(f respecte la combinaison linéaire de deux vecteurs)
Alors f est linéaire.

2 Image réciproque et noyau, image directe et ensemble image

2.a Image réciproque et noyau

Proposition.

Soit $f : E \to F$ linéaire. Soit B un sev de F. Alors $f^{-1}(B)$ est un sev de E.

Démonstration.

— $f^{-1}(B) \subset E$

— Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(x_1, x_2) \in f^{-1}(B)^2$. Montrons que $\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_2 \in f^{-1}(B)$.
$x_1 \in f^{-1}(B)$ donc $f(x_1) \in B$. $x_2 \in f^{-1}(B)$ donc $f(x_2) \in B$.
$f(\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_2) = \lambda \cdot f(x_1) + \mu \cdot f(x_2) \in B$ car $(f(x_1), f(x_2)) \in B^2$ et B sev de F.
Donc $\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_2 \in f^{-1}(B)$.

— Montrons que $0_E \in f^{-1}(B)$. $f(0_E) = O_F \in B$ car B sev de F. Donc $0_E \in f^{-1}(B)$

Donc $f^{-1}(B)$ est un sev de E

□

Définition.

Soit $f : E \to F$ linéaire.
On appelle noyau de f et on note $Ker(f)$ l'ensemble $\{x \in E | f(x) = 0_F\}$.
($Ker(f)$ est l'ensemble des $x \in E$ tels que $f(x) = 0_F$)

Proposition.

Soit $f : E \to F$ linéaire. $Ker(f)$ est un sev de E.

Démonstration. $Ker(f) = f^{-1}(\{0_F\})$ et $\{0_F\}$ est un sev de F donc $Ker(f)$ est un sev de E. □

Proposition.

Soit $f : E \to F$ linéaire.
f est injective $\Leftrightarrow Ker(f) = \{0_E\}$

Démonstration. Montrons "$\Leftarrow$". Supposons que $Ker(f) = \{0_E\}$. Montrons que f est injective. Soit $(x, x') \in E^2$. On suppose que $f(x) = f(x')$. Montrons que $x = x'$. $f(x) - f(x') = 0_F$ donc $f(x - x') = 0_F$ donc $x - x' \in Ker(f)$. Or $Ker(f) = \{0_E\}$. Donc $x - x' = 0_E$. Donc $x = x'$. Donc f est injective. Nous avons montré "$\Leftarrow$".

Montrons "$\Rightarrow$". Supposons que f est injective. Montrons $Ker(f) = \{0_E\}$. L'inclusion $\{0_E\} \subset Ker(f)$ est évidemment toujours vérifiée. Montrons que $Ker(f) \subset \{0_E\}$. Soit $x \in Ker(f)$. $f(x) = 0_F$. $f(x) = f(0_E)$ et f est injective donc $x = 0_E$. Donc $Ker(f) \subset \{0_E\}$. Par double inclusion, $Ker(f) = \{0_E\}$. Nous avons montré "$\Rightarrow$".

Par double implication, nous avons montré l'équivalence.

□

2.b Image directe et ensemble image

Proposition.

Soit $f : E \to F$ linéaire. Soit A un sev de E. Alors $f(A)$ est un sev de F.

Démonstration.

— $f(A) \subset F$

— Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Soit $(y_1, y_2) \in f(A)^2$. Montrons que $\lambda \cdot y_1 + \mu \cdot y_2 \in f(A)$.
$y_1 \in f(A)$ donc il existe $a_1 \in A$ tel que $y_1 = f(a_1)$.
$y_2 \in f(A)$ donc il existe $a_2 \in A$ tel que $y_2 = f(a_2)$.
$\lambda \cdot y_1 + \mu \cdot y_2 = \lambda \cdot f(a_1) + \mu \cdot f(a_2) = f(\lambda \cdot a_1 + \mu \cdot a_2)$
$\lambda \cdot a_1 + \mu \cdot a_2 \in A$ car $(a_1, a_2) \in A^2$ et A sev de E.
En prenant $a = \lambda \cdot a_1 + \mu \cdot a_2$, on a $a \in A$ et $\lambda \cdot y_1 + \mu \cdot y_2 = f(a)$.
Donc $\lambda \cdot y_1 + \mu \cdot y_2 \in f(A)$

— Montrons que $0_F \in f(A)$. $f(0_E) = 0_F$. $0_E \in A$ car A sev de E.
En prenant $a = 0_E$ on a $a \in A$ et $f(a) = O_F$ donc $O_F \in f(A)$

Donc $f(A)$ est un sev de F

□

Définition.

Soit $f : E \to F$.
On appelle ensemble image de f et on note $Im(f)$ l'ensemble $\{f(x) | x \in E\}$.
($Im(f)$ est l'ensemble des éléments de la forme $f(x)$ avec $x \in E$.)
$Im(f) \subset F$. $Im(f) = \{y \in F | \exists x \in E, y = f(x)\}$.
($Im(f)$ est l'ensemble des éléments de F admettant au moins un antécédent par f.)

Proposition.

Soit $f : E \to F$ linéaire. Alors $Im(f)$ est un sev de F.

Démonstration. $Im(f) = f(E)$ et E est un sev de E donc $Im(f)$ est un sev de F □

Proposition.

Soit $f : E \to F$. f est surjective $\Leftrightarrow Im(f) = F$.

Démonstration. f est surjective $\Leftrightarrow \forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x) \Leftrightarrow \forall y \in F, y \in Im(f) \Leftrightarrow F \subset Im(f) \Leftrightarrow F = Im(f)$ (car l'inclusion $Im(f) \subset F$ est évidemment toujours vérifiée).

□

3 Applications linéaires et dimension finie

3.a Une application linéaire est uniquement déterminée par l'image d'une base

Proposition.

Soit E et F des $\mathbb{K}$-ev.
Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E.
Soit $(y_1, ..., y_n)$ une famille de vecteurs de F.
Il existe une unique application linéaire $f : E \to F$ telle que $f(e_1) = y_1$,...,$f(e_n) = y_n$.

Proposition.

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E.
f est injective $\Leftrightarrow (f(e_1), ..., f(e_n))$ est libre
$(f(e_1), ..., f(e_n))$ est génératrice de $Im(f)$
f est surjective $\Leftrightarrow (f(e_1), ..., f(e_n))$ est génératrice de F
f est bijective $\Leftrightarrow (f(e_1), ..., f(e_n))$ est une base de F

3.b Dimensions et isomorphismes

Proposition.

Soit E un F des $\mathbb{K}$-ev.
Si E est de dimension finie et E et F sont isomorphes
alors F est de dimension finie et $dim(E) = dim(F)$.
Si E et F sont de dimension finie et $dim(E) = dim(F)$ alors E et F sont isomorphes.
En particulier, si E et F sont de dimension finie alors
$dim(E) = dim(F)$ ssi E et F sont isomorphes.

Proposition.

Soit $f : E \to F$ un isomorphisme et A un sev de E de dimension finie.
Alors $f(A)$ est de dimension finie et $dim(f(A)) = dim(A)$.

Proposition.

Soit $f : E \to F$ un isomorphisme et $(x_1, ..., x_n)$ une famille de vecteurs de E.
Alors $rg(f(x_1), ..., f(x_n)) = rg(x_1, .., x_n)$.

3.c Applications linéaires entre espaces vectoriels de dimension finie

Proposition.

Soit $f : E \to F$ linéaire. On suppose que E et F sont de dimension finie.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) f est bijective.
ii) f est injective et $dim(E) = dim(F)$.
iii) f est surjective et $dim(E) = dim(F)$.

Corollaire.

Soit $f : E \to E$ un endomorphisme. On suppose que E est de dimension finie.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) f est bijectif
ii) f est injectif
iii) f est surjectif

3.d Application linéaire de rang fini

Définition.

Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
On dit que f est de rang fini ssi $Im(f)$ est de dimension finie.
Dans ce cas, on appelle rang de f l'entier $rg(f) = dim(Im(f))$

Proposition.

Soit $f : E \to F$ linéaire.
On suppose que E est de dimension finie. Alors f est de rang fini.
Si $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E alors $rg(f) = rg(f(e_1), ..., f(e_n))$.

Proposition.

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Soit S un supplémentaire de $Ker(f)$ dans E.
Alors f induit un isomorphisme de S dans $Im(f)$.

Théorème (Théorème du rang)**.**

Soit $f : E \to F$ linéaire.
On suppose que E est de dimension finie. $rg(f) = dim(E) - dim(Ker(f))$.

Démonstration. E est de dimension finie donc $Ker(f)$ admet au moins un supplémentaire S dans E. f induit un isomorphisme de S dans $Im(f)$. $rg(f) = dim(Im(f)) \underbrace{=}_{car\, S\, et\, Im(f)\, isomorphes} dim(S) = dim(E) - dim(Ker(f)$.

□

Proposition.

Soit $f : E \to F$ linéaire de rang fini.
Si $g : E' \to E$ est un isomorphisme alors $f \circ g$ est de rang fini et $rg(f \circ g) = rg(f)$.
Si $g : F \to F'$ est un isomorphisme alors $g \circ f$ est de rang fini et $rg(g \circ f) = rg(f)$.

4 Opérations

Proposition.

$\mathcal{L}(E, F)$ est un sev de $\mathcal{F}(E, F)$. En particulier, $\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-ev.

Proposition.

- Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ linéaires. Alors $g \circ f$ est linéaire.
- Id_E est linéaire
- Soit $f : E \to F$ linéaire bijective. Alors f^{-1} est linéaire.

Proposition (bilinéarité de la composition)**.**

$\forall f \in \mathcal{F}(E,F), \begin{cases} \forall (g_1,g_2) \in \mathcal{F}(F,G)^2,\ (g_1+g_2)\circ f = (g_1 \circ f) + (g_2 \circ f) \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall g \in \mathcal{F}(F,G),\ (\lambda \cdot g)\circ f = \lambda \cdot (g \circ f) \end{cases}$
(la composition est linéaire à gauche)
$\forall g \in \mathcal{L}(F,G), \begin{cases} \forall (f_1,f_2) \in \mathcal{F}(E,F)^2,\ g\circ (f_1+f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2 \\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall f \in \mathcal{F}(E,F),\ g\circ(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot (g \circ f) \end{cases}$
(la composition est linéaire à droite, si l'application fixée à gauche est linéaire)

5 Espace $\mathcal{L}(E)$

5.a Opérations

5.b Propriétés manquant à la composition

5.c Puissances

Définition.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $f^0 = Id_E$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = \underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{n\,termes}$.

5.d Automorphismes

Proposition.

$\forall (f,g) \in GL(E)^2, f\circ g \in GL(E)\, et\, (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$
$Id_E \in GL(E)\, et\, Id_E^{-1} = Id_E$
$\forall f \in GL(E), f^{-1} \in GL(E)\, et\, (f^{-1})^{-1} = f$

6 Equation linéaire

Définition-Propriété.

Soit $f : E \to F$ linéaire. Soit $b \in F$.
On considère l'équation linéaire : $(\mathcal{L}) : f(x) = b$
On considère l'équation linéaire homogène associée : $(\mathcal{L}_0) : f(x) = 0_F$
L'ensemble des solutions de $(\mathcal{L}_0)$ est $Ker(f)$ donc est un sev de E.
L'équation $(\mathcal{L})$ admet au moins une solution ssi $b \in Im(f)$.
Si x_{part} est solution particulière de $(\mathcal{L})$ alors les solutions de $(\mathcal{L})$ sont les éléments de E de la forme $x_{part} + x_0$ avec x_0 solution de $(\mathcal{L}_0)$.