Résumé du chapitre 35: représentation matricielle

Table des matières

1 Représentation matricielle d'un vecteur, d'une famille, d'une application **1**
1.a Vecteur 1
1.b Famille de vecteurs 1
1.c Application linéaire 1

2 Le produit matriciel représente l'évaluation et la composition **2**
2.a Evaluation 2
2.b Composition 2

3 Les matrices inversibles représentent bases, isomorphismes, automorphismes **3**
3.a Bases 3
3.b Isomorphismes et automorphismes 3

4 Algèbre linéaire canoniquement associée aux matrices **3**

5 Matrices de passage et formules de changement de base **3**
5.a Matrices de passage 3
5.b Formules de changement de base 3

1 Représentation matricielle d'un vecteur, d'une famille, d'une application

1.a Vecteur

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n. Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. Soit x un vecteur de E. On appelle matrice de x dans la base $\mathcal{B}$ et on note $Mat_{\mathcal{B}}(x)$ la matrice colonne de taille $(n, 1)$ formée des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

Proposition.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n. Soit $\mathcal{B}$ une base de E.
L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x & \mapsto & Mat_{\mathcal{B}}(x) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

1.b Famille de vecteurs

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n. Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. Soit $\mathcal{F} = (x_1, ..., x_p)$ une famille de vecteurs de E. On appelle matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ et on note $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ la matrice de taille (n, p) telle que pour tout $j \in [[1, p]]$, la j-ième colonne est formée des coordonnées de x_j dans la base $\mathcal{B}$.

1.c Application linéaire

Définition.

Soit E et F des $\mathbb{K}$-ev de dimension finie p et n. Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ et $\mathcal{C} = (f_1, ..., f_n)$ des bases de E et F. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On appelle matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et on note $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ la matrice de taille (n, p) telle que pour tout $j \in [[1, p]]$, la j-ième colonne est formée des coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$.

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n et $\mathcal{B}$ une base de E. Soit f un endomorphisme de E. On appelle matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ et on note $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice carrée de taille n $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.

Proposition.

Soit E et F des $\mathbb{K}$-ev de dimension finie p et n. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases de E et F.
L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \end{array}\right.$ est un isomorphisme.
$\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et $dim(\mathcal{L}(E, F)) = dim(E) \times dim(F)$

Corollaire.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n. Soit $\mathcal{B}$ une base de E.
L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{M}_{n}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & Mat_{\mathcal{B}}(f) \end{array}\right.$ est un isomorphisme.
$\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie et $dim(\mathcal{L}(E)) = dim(E)^2$

2 Le produit matriciel représente l'évaluation et la composition

2.a Evaluation

Proposition.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $x \in E$. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases de E et F.
$Mat_{\mathcal{C}}(f(x)) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \times Mat_{\mathcal{B}}(x)$.

Corollaire.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. $Mat_{\mathcal{B}}(f(x)) = Mat_{\mathcal{B}}(f) \times Mat_{\mathcal{B}}(x)$

2.b Composition

Proposition.

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Soit $\mathcal{B}$,$\mathcal{C}$,$\mathcal{D}$ des bases de E,F,G.
$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = Mat_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g) \times Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

Corollaire.

Soit $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. $Mat_{\mathcal{B}}(g \circ f) = Mat_{\mathcal{B}}(g) \times Mat_{\mathcal{B}}(f)$.

Proposition.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. $Mat_{\mathcal{B}}(Id_E) = I_n$.

3 Les matrices inversibles représentent bases, isomorphismes, automorphismes

3.a Bases

Proposition.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E.
$\mathcal{F}$ est une base de $E \Leftrightarrow Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est carrée inversible

3.b Isomorphismes et automorphismes

Proposition.

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases de E et F.
f est bijective $\Leftrightarrow Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est carrée inversible
Dans ce cas, $Mat_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f^{-1}) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)^{-1}$.

Corollaire.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E.
f est bijectif $\Leftrightarrow Mat_{\mathcal{B}}(f)$ est inversible
Dans ce cas, $Mat_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = Mat_{\mathcal{B}}(f)^{-1}$.

4 Algèbre linéaire canoniquement associée aux matrices

5 Matrices de passage et formules de changement de base

5.a Matrices de passage

Définition.

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et on note $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice inversible $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.

Proposition.

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

5.b Formules de changement de base

Proposition (Formule de changement de base pour un vecteur)**.**

Soit $x \in E$. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ des bases de E.
On pose $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, $X = Mat_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = Mat_{\mathcal{B}'}(x)$. Alors $X' = P^{-1}X$.

Proposition (Formule de changement de base pour une application linéaire)**.**

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ des bases de E. Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ des bases de F.
On pose $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, $Q = P_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$, $A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ et $B = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)$. Alors $B = Q^{-1}AP$.

Corollaire (Formule de changement de base pour un endomorphisme)**.**

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ des bases de E.
On pose $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$ et $B = Mat_{\mathcal{B}'}(f)$. Alors $B = P^{-1}AP$.