Résumé du chapitre 38: déterminant

Table des matières

1 Application linéaire selon chaque variable, alternée, antisymétrique

Définition.

Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$.
Soit $i \in [[1, n]]$. On dit que f est linéaire selon la i-ième variable ssi :
$\forall (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n) \in E^{n-1}$,

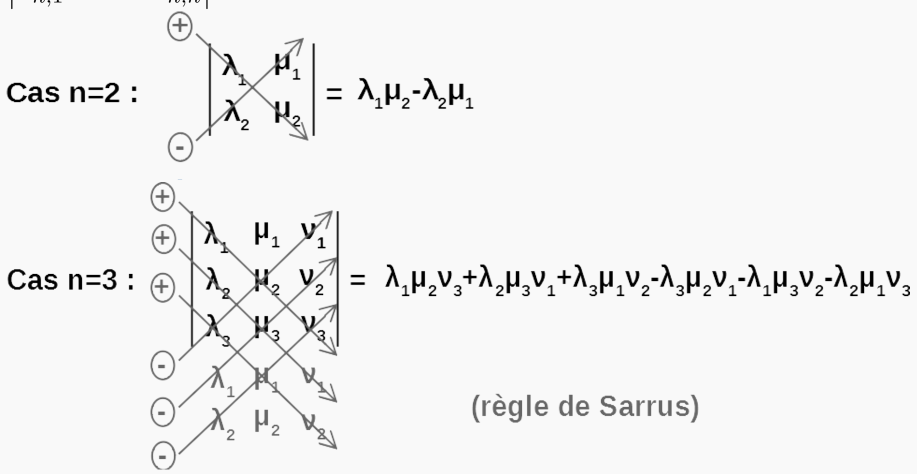
$$\begin{cases} \forall (x_i, x'_i) \in E^2, \\ f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i + x'_i, x_{i+1}, ..., x_n) \\ = f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n) + f(x_1, ..., x_{i-1}, x'_i, x_{i+1}, ..., x_n) \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x_i \in E, \\ f(x_1, ..., x_{i-1}, \lambda \cdot x_i, x_{i+1}, ..., x_n) = \lambda f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n) \end{cases}$$

On dit que f est alternée ssi :
pour tout $(x_1, ..., x_n) \in E^n$,
si deux des vecteurs $x_1, ..., x_n$ sont égaux alors $f(x_1, ..., x_n) = 0$
On dit que f est antisymétrique ssi :
pour tout $(i, j) \in [[1, n]]^2$ tel que $i < j$ et pour tout $(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_n) \in E^n$,
$f(x_1, ..., x_j, ..., x_i, ..., x_n) = -f(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_n)$

2 Définition du déterminant d'une matrice carrée

Définition.

A toute matrice carrée $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ on associe un scalaire $det(A)$ aussi noté $\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$ défini par une formule dépendant des coefficients.



3 Déterminant d'une famille de n vecteurs dans une base d'un ev de dimension n

3.a Définition

Définition-Propriété.

On pose $n = dim(E)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. Il existe une unique application $det_{\mathcal{B}} : E^n \to \mathbb{K}$ linéaire selon chaque variable et alternée telle que $det_{\mathcal{B}}(e_1, ..., e_n) = 1$.

Proposition.

On pose $n = dim(E)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. Soit $\mathcal{F} = (x_1, ..., x_n)$ une famille de vecteurs de E. Alors $det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_n) = det(Mat_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_n))$.

Proposition.

On pose $n = dim(E)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ linéaire selon chaque variable et alternée. Alors il existe un unique $C \in \mathbb{K}$ tel que $f = C \cdot det_{\mathcal{B}}$, qui est $C = f(e_1, ..., e_n)$.

3.b Propriétés

Proposition.

On pose $n = dim(E)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. Soit $\mathcal{F} = (x_1, ..., x_n)$ une famille de vecteurs de E. $\mathcal{F}$ est une base de $E \Leftrightarrow det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_n) \neq 0$.

4 Déterminant d'un endomorphisme d'un ev de dimension finie

4.a Définition

Définition-Propriété.

On pose $n = dim(E)$. Soit $f : E \to E$ un endomorphisme. Il existe un unique scalaire $det(f)$ tel que pour toute base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ de E et toute famille $\mathcal{F} = (x_1, ..., x_n)$ de vecteurs de E, $det_{\mathcal{B}}(f(x_1), ..., f(x_n)) = det(f)det_{\mathcal{B}}(x_1, ...x_n)$.

Proposition.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. $det(f) = det(Mat_{\mathcal{B}}(f))$.

4.b Propriétés

Proposition.

-Pour tout $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$, $det(g \circ f) = det(g) \times det(f)$.
-$det(Id_E) = 1$
- Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, f bijectif $\Leftrightarrow det(f) \neq 0$

5 Propriétés du déterminant d'une matrice carrée

5.a Propriétés sur les colonnes

Proposition.

Effectuer une dilatation de rapport λ sur une colonne d'une matrice
multiplie le déterminant par λ.
Effectuer une transvection sur les colonnes d'une matrice
ne modifie le déterminant.
Effectuer une transposition sur les colonnes d'une matrice
multiplie le déterminant par -1.

Proposition.

Le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure est le produit de ses coefficients diagonaux.

5.b Propriétés algébriques

Proposition.

-Pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $det(AB) = det(A)det(B)$.
-$det(I_n) = 1$
-Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A est inversible $\Leftrightarrow det(A) \neq 0$

Proposition.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $det(A^\top) = det(A)$.

5.c Propriétés sur les lignes

Proposition.

Effectuer une dilatation de rapport λ sur une ligne d'une matrice
multiplie le déterminant par λ.
Effectuer une transvection sur les lignes d'une matrice
ne modifie le déterminant.
Effectuer une transposition sur les lignes d'une matrice
multiplie le déterminant par -1.

Proposition.

Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est le produit de ses coefficients diagonaux.

5.d Formules de développement

Proposition.

Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[[1,n]]^2}$ une matrice carrée de taille n.
Pour tout $(i, j) \in [[1, n]]^2$, on note $\Delta_{i,j}$ le déterminant de la matrice carrée de taille $n - 1$ obtenue en supprimant la i^{ieme} ligne et la j^{ieme} colonne de A ($\Delta_{i,j}$ est appelé le mineur d'indice (i, j) de A).
Soit $j \in [[1, n]]$. $det(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$.
(formule de développement du déterminant de A par rapport à la j-ième colonne)
Soit $i \in [[1, n]]$. $det(A) = \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$.
(formule de développement du déterminant de A par rapport à la i-ième ligne)