Résumé du chapitre 41: variables aléatoires (va)

Table des matières

1 Définition

Définition.

On appelle va toute application $X : \Omega \to E$ où E est un ensemble.
Si $E = \mathbb{R}$, on dit que la va est réelle.

2 Support d'une va, évènements ne dépendant que de la valeur prise par une va, loi de probabilité d'une va

2.a Support d'une va

Définition.

Soit $X : \Omega \to E$ une va. On appelle support de X l'ensemble $X(\Omega) = \{X(\omega)|\omega \in \Omega\}$ ($X(\Omega)$ est l'ensemble des valeurs que peut prendre X). $X(\Omega) \subset E$.

2.b Evènements ne dépendant que de la valeur prise par une va

Définition.

Soit $X : \Omega \to E$ une va.
Soit A une partie de E. On note $(X \in A)$ l'évènement $\{\omega \in \Omega|X(\omega) \in A\}$
(évènement "la valeur prise par X appartient à A").
Soit $x \in E$. On note $(X = x)$ l'évènement $\{\omega \in \Omega|X(\omega) = x\}$
(évènement "la valeur prise par X est égale à x").

Proposition.

Soit $X : \Omega \to E$ une va.
$(X \in \emptyset) = \emptyset$. $(X \in X(\Omega)) = \Omega$.
Soit A une partie de E. $\overline{(X \in A)} = (X \in \overline{A})$.
Soit A et B deux parties de E.
$(X \in A) \cup (X \in B) = (X \in A \cup B)$. $(X \in A) \cap (X \in B) = (X \in A \cap B)$.
Si A et B sont disjointes alors $(X \in A)$ et $(X \in B)$ sont incompatibles.

2.c Loi de probabilité d'une va

Définition-Propriété.

Soit $X : \Omega \to E$ une va. L'application $P_X : \mathcal{P}(X(\Omega)) \to [0, 1]$ définie par
$P_X(A) = P(X \in A)$ est une mesure de probabilité. P_X est appelée la loi probabilité de X.

Proposition.

Soit $X : \Omega \to E$ une va.
$(X = x)_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'évènements. En particulier, $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1$.
Pour tout $x \in E$, $(X = x) \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in X(\Omega)$.
Pour toute partie finie A de E, $P(X \in A) = \sum\limits_{x \in A} P(X = x)$.
Pour tout partie A de E, $(X \in A) = (X \in A \cap X(\Omega))$.

3 Va usuelles

Définition-Propriété.

Soit $C \in \mathbb{R}$. On dit qu'une va X est certaine de valeur C ssi X est constante de valeur C. Dans ce cas, $X(\Omega) = \{C\}$ et $P(X = C) = 1$.

Définition-Propriété.

Soit F un ensemble fini. On dit qu'une va X suit la loi uniforme sur F et on note $X \sim U(F)$ ssi $X(\Omega) = F$ et les évènements $(X = x)$, $x \in F$ sont équiprobables. Dans ce cas, pour tout $x \in F$, $P(X = x) = \frac{1}{Card(F)}$ et, pour toute partie A de F, $P(X \in A) = \frac{Card(A)}{Card(F)}$.

Définition-Propriété.

Soit $p \in]0,1[$. On effectue une épreuve aléatoire menant à un succès avec la probabilité p.
On note X la va prenant pour valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec.
$X(\Omega) = \{0,1\}$. $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$.
On dit que X suit la loi de Bernouilli de paramètre p et on note $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Définition-Propriété.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. On effectue n épreuves aléatoires indépendantes, chacune menant à un succès avec la probabilité p.
On note X la va prenant pour valeur le nombre de succès obtenus.
$X(\Omega) = [[0,n]]$. Pour tout $k \in [[0,n]]$, $P(X = k) = \binom{n}{k}(1-p)^{n-k}p^k$.
On dit que X suit la loi binômiale de paramètres n et p et on note $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

4 Couple de va

Définition.

Soit $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ deux va.
Le couple de va (X,Y) est considéré comme la va $\left\{\begin{array}{ccc} \Omega & \to & E \times F \\ \omega & \mapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}\right.$.
La loi conjointe du couple (X,Y) est la loi de la va ci-dessus.
Les lois marginales du couple (X,Y) sont la loi de X et la loi de Y

Proposition.

Soit $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ deux va.
$(X,Y)(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$
Pour tout $(A,B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$, $((X,Y) \in A \times B)$ est l'évènement $(X \in A) \cap (Y \in B)$.
Pour tout $(x,y) \in E \times F$, $((X,Y) = (x,y))$ est l'évènement $(X = x) \cap (Y = y)$.

Proposition.

Soit $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ deux va.
Pour tout $x \in X(\Omega)$, $P(X = x) = \sum\limits_{y \in Y(\Omega)} P((X, Y) = (x, y))$.
Pour tout $y \in Y(\Omega)$, $P(Y = y) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} P((X, Y) = (x, y))$.
Les lois marginales sont déterminées par la loi conjointe.

Démonstration.
Soit $x \in X(\Omega)$. $(Y = y)_{y \in Y(\Omega)}$ est un système complet d'évènements donc, d'après la formule des probabilités totales, $P(X = x) = \sum\limits_{y \in Y(\Omega)} P((X = x) \cap (Y = y)) = \sum\limits_{y \in Y(\Omega)} P((X, Y) = (x, y))$.

Soit $y \in Y(\Omega)$. $(X = x)_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'évènements donc, d'après la formule des probabilités totales, $P(Y = y) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} P((X = x) \cap (Y = y)) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} P((X, Y) = (x, y))$.

$\square$

Proposition.

Soit $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ deux va.
Pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $P((X, Y) = (x, y)) = P(X = x | Y = y) P(Y = y)$.
La loi conjointe de (X, Y) est déterminée par les lois conditionnelles de X sachant $(Y = y)$, $y \in Y(\Omega)$ et par la loi de Y.
Pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $P((X, Y) = (x, y)) = P(Y = y | X = x) P(X = x)$.
La loi conjointe de (X, Y) est déterminée par les lois conditionnelles de Y sachant $(X = x)$, $x \in X(\Omega)$ et par la loi de X.

Démonstration. Soit $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
$P((X, Y) = (x, y)) = P((X = x) \cap (Y = y)) = P(X = x | Y = y) P(Y = y)$.
$P((X, Y) = (x, y)) = P((Y = y) \cap (X = x)) = P(Y = y | X = x) P(X = x)$.

$\square$

5 Va indépendantes

Définition.

Soit $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ deux va.
On dit que X et Y sont indépendantes ssi pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$ les évènements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants i.e. $P((X, Y) \in A \times B) = P(X \in A) P(Y \in B)$.

Proposition.

Soit $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ deux va.
X et Y sont indépendantes
$\Leftrightarrow$ pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, les évènements $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont indépendants i.e. $P((X, Y) = (x, y)) = P(X = x) P(Y = y)$

Définition.

Soit $X_1 : \Omega \to E_1$,...,$X_n : \Omega \to E_n$ des va. On dit que les va X_1,...,X_n sont mutuellement indépendantes ssi pour tout $(A_1, ..., A_n) \in \mathcal{P}(E_1) \times ... \times \mathcal{P}(E_n)$, les évènements $(X_1 \in A_1), ..., (X_n \in A_n)$ sont mutuellement indépendants.

Proposition.

Soit $X_1 : \Omega \to E_1$,...,$X_n : \Omega \to E_n$ des va.
Les va X_1,...,X_n sont mutuellement indépendantes
$\Leftrightarrow$ pour tout $(x_1, ..., x_n) \in X_1(\Omega) \times ... \times X_n(\Omega)$, les évènements $(X_1 = x_1), ..., (X_n = x_n)$ sont mutuellement indépendants.

Proposition.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.
Soit X_1,...,X_n des va mutuellement indépendantes suivant la même loi de Bernouilli de paramètre p. Alors $X_1 + ... + X_n$ suit la loi binômiale de paramètres n et p.

6 Espérance

6.a Définition et théorème de transfert

Définition.

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une va réelle.
On appelle espérance de X et on note $E(X)$ le réel $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} P(X = x)x$
($E(X)$ est la moyenne des valeurs que peut prendre X pondérée par leurs probabilités).

Théorème (Théorème de tranfert)**.**

Soit $X : \Omega \to E$ une va et $f : E \to \mathbb{R}$. Alors $E(f(X)) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} P(X = x)f(x)$.

6.b Exemples usuels

Proposition.

Soit X une va réelle.
Si X est certaine de valeur C où $C \in \mathbb{R}$, $E(X) = C$.
Si $X \sim U([[1, n]])$ où $n \in \mathbb{N}^*$, $E(X) = \frac{n+1}{2}$.
Si $X \sim \mathcal{B}(p)$ où $p \in]0, 1[$, $E(X) = p$.
Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$, $E(X) = np$.

Démonstration.

Supposons X certaine de valeur C où $C \in \mathbb{R}$.
$X(\Omega) = \{C\}$. $E(X) = P(X = C)C = 1 \times C = C$.
Supposons $X \sim U([[1, n]])$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

$X(\Omega) = [[1, n]]$. $E(X) = \sum_{k=1}^{n} P(X = k)k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$.

Supposons $X \sim \mathcal{B}(p)$ où $p \in]0, 1[$. $X(\Omega) = \{0, 1\}$.

$E(X) = P(X = 0)0 + P(X = 1)1 = (1 - p)0 + p1 = p$.

Supposons $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.

Pour tout $k \in [[1, n]]$, $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ (car $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k}\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$) donc $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$. $X(\Omega) = [[0, n]]$. $E(X) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k)k = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}(1 - p)^{n-k}p^k = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}(1-p)^{n-k}p^k = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}(1-p)^{n-k}p^k = n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}(1-p)^{n-k}p^k = n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}p^{k-1}p = np\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}p^{k-1} \underbrace{=}_{l=k-1} np\sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l}(1-p)^{(n-1)-l}p^l = np((1-p)+p)^{n-1} = np1^{n-1} = np$.

$\square$

6.c Propriétés

Proposition (linéarité)**.**

Pour tout $X : \Omega \to \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$, $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $E(\lambda X) = \lambda E(X)$.

Proposition.

Soit X une va réelle et $C \in \mathbb{R}$. $E(X + C) = E(X) + C$.

Proposition.

Soit X et Y des va réelles. On suppose X et Y indépendantes. Alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Proposition (positivité)**.**

Soit X une va réelle. On suppose X positive. Alors $E(X) \geq 0$.

Proposition (croissance)**.**

Soit X et Y des va réelles. On suppose $X \leq Y$. Alors $E(X) \leq E(Y)$.

Proposition (inégalité de Markov)**.**

Soit X une va réelle positive et $a > 0$. $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$.

7 Variance

7.a Définition et théorème de König-Huygens

Définition.

Soit X une va réelle.
On appelle variance de X et on note $V(X)$ le réel positif $E((X-E(X))^2)$.
On appelle écart type de X le réel positif $\sqrt{V(X)}$.

Théorème (théorème de König-Huygens)**.**

Soit X une va réelle. $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$.

7.b Exemples usuels

Proposition.

Soit X une va réelle.
Si X est certaine de valeur C où $C\in\mathbb{R}$, $V(X)=0$.
Si $X\sim U([[1,n]])$ où $n\in\mathbb{N}^*$, $V(X)=\frac{(n-1)(n+1)}{12}$.
Si $X\sim\mathcal{B}(p)$ où $p\in]0,1[$, $V(X)=p(1-p)$.
Si $X\sim\mathcal{B}(n,p)$ où $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in]0,1[$, $V(X)=np(1-p)$.

Démonstration.

Supposons X certaine de valeur C où $C\in\mathbb{R}$.

$V(X)=E((X-E(X))^2)$. $E(X)=C$ donc $X-E(X)$ est nulle donc $(X-E(X))^2$ est nulle donc $E((X-E(X))^2)=0$ donc $V(X)=0$.

Supposons $X\sim U([[1,n]])$ où $n\in\mathbb{N}^*$.

$V(X)=E(X^2)-E(X)^2$. $E(X)=\frac{n+1}{2}$. $X(\Omega)=[[1,n]]$. $E(X^2)=\sum\limits_{k=1}^{n}P(X=k)k^2=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}k^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$. $V(X)=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-(\frac{n+1}{2})^2=(n+1)[\frac{2n+1}{6}-\frac{n+1}{4}]=(n+1)\frac{2(2n+1)-3(n+1)}{12}=(n+1)\frac{n-1}{12}=\frac{(n-1)(n+1)}{12}$.

Supposons $X\sim\mathcal{B}(p)$ où $p\in]0,1[$.

$V(X)=E(X^2)-E(X)^2$. $E(X)=p$. $X(\Omega)=\{0,1\}$. $E(X^2)=P(X=0)0^2+P(X=1)1^2=(1-p)\times 0+p\times 1=p$. $V(X)=p-p^2=p(1-p)$.

Supposons $X\sim\mathcal{B}(n,p)$ où $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in]0,1[$.

$V(X)=E(X^2)-E(X)^2$. $E(X)=np$. Pour tout $k\in[[2,n]]$, $\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}=\frac{n(n-1)}{k(k-1)}\binom{n-2}{k-2}$ donc $k(k-1)\binom{n}{k}=n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$. $X(\Omega)=[[0,n]]$. $E(X(X-1))=\sum\limits_{k=0}^{n}P(X=k)k(k-1)=\sum\limits_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}(1-p)^{n-k}p^k=\sum\limits_{k=2}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}(1-p)^{n-k}p^k=\sum\limits_{k=2}^{n}n(n-1)\binom{n-2}{k-2}(1-p)^{n-k}p^k=n(n-1)\sum\limits_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}(1-p)^{n-k}p^k=n(n-1)\sum\limits_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}(1-p)^{(n-2)-(k-2)}p^{k-2}p^2=n(n-1)p^2\sum\limits_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}(1-p)^{(n-2)-(k-2)}p^{k-2}\underbrace{=}_{l=k-2}n(n-1)p^2\sum\limits_{l=0}^{n-2}\binom{n-2}{l}(1-p)^{(n-2)-l}p^l=n(n-1)p^2((1-p)+p)^{n-2}=n(n-1)p^21^{n-2}=n(n-1)p^2$. $E(X^2)=E(X(X-1)+X)=E(X(X-1))+E(X)$. $V(X)=E(X(X-1))+E(X)-E(X)^2=n(n-1)p^2+np-(np)^2=n^2p^2-np^2+np-n^2p^2=np-np^2=np(1-p)$. □

7.c Propriétés

Proposition.

Soit X une va réelle et $C \in \mathbb{R}$. $V(X+C) = V(X)$.
Soit X une va réelle et $\lambda \in \mathbb{R}$. $V(\lambda X) = \lambda^2 V(X)$.

Proposition (inegalité de Bienaymé-Tchebychev)**.**

Soit X une va réelle et $a > 0$. $P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$.

8 Covariance

8.a Définition

Définition.

Si X et Y sont deux va réelles,
on appelle covariance de X et Y le réel $Cov(X,Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$.
En particulier, si X est une va réelle, $Cov(X,X) = V(X)$.

Proposition.

Soit X et Y deux va réelles. $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

Définition.

Soit X et Y deux va réelles.
On dit que X et Y sont non corrélées ssi $Cov(X,Y) = 0$ i.e. $E(XY) = E(X)E(Y)$.
En particulier, si X et Y sont indépendantes alors X et Y sont non corrélées.

8.b Propriétés

Proposition.

Cov est une forme bilinéaire symétrique.

Proposition.

Soit X et Y deux va réelles. $V(X+Y) = V(X) + 2Cov(X,Y) + V(Y)$.
En particulier, $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ ssi X et Y sont non corrélées.

Proposition.

Soit $X_1, ..., X_n$ des va réelles.
Si $X_1, ..., X_n$ sont 2 à 2 non corrélées, $V(X_1 + ... + X_n) = V(X_1) + ... + V(X_n)$.
En particulier, si X_1,...,X_n sont 2 à 2 indépendantes, $V(X_1 + ... + X_n) = V(X_1) + ... + V(X_n)$.