Résumé du chapitre 5: sommes et produits indexés par un intervalle d'entiers

Table des matières

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1 Définition

Définition.

Soit $(p, n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $p \leq n$. Soit $x_p, x_{p+1}, \ldots, x_n$ des réels (ou des complexes).
$\sum\limits_{k=p}^{n} x_k = x_p + x_{p+1} + \ldots + x_n$ se lit "somme des x_k pour k variant de p à n"
$\prod\limits_{k=p}^{n} x_k = x_p \times x_{p+1} \times \ldots \times x_n$ se lit "produit des x_k pour k variant de p à n"

Proposition.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1+2+...+n = \sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $1^2+2^2+...+n^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2 Propriétés

Proposition.

$\sum\limits_{k=p}^{n} (x_k + y_k) = \sum\limits_{k=p}^{n} x_k + \sum\limits_{k=p}^{n} y_k$ et $\sum\limits_{k=p}^{n} \lambda x_k = \lambda \sum\limits_{k=p}^{n} x_k$ (linéarité)
$\prod\limits_{k=p}^{n} (x_k \times y_k) = (\prod\limits_{k=p}^{n} x_k) \times (\prod\limits_{k=p}^{n} y_k)$ et $\prod\limits_{k=p}^{n} x_k^{\lambda} = (\prod\limits_{k=p}^{n} x_k)^{\lambda}$

Démonstration. $\sum\limits_{k=p}^{n} (x_k + y_k) = (x_p + y_p) + (x_{p+1} + y_{p+1}) + ... + (x_n + y_n)$

$= (x_p + x_{p+1} + ... + x_n) + (y_p + y_{p+1} + ... + y_n) = \sum\limits_{k=p}^{n} x_k + \sum\limits_{k=p}^{n} y_k$

$\sum\limits_{k=p}^{n} \lambda x_k = \lambda x_p + \lambda x_{p+1} + ... + \lambda x_n = \lambda(x_p + x_{p+1} + ... + x_n) = \lambda \sum\limits_{k=p}^{n} x_k$

$\prod\limits_{k=p}^{n} (x_k \times y_k) = (x_p \times y_p) \times (x_{p+1} \times y_{p+1}) \times ... \times (x_n \times y_n)$

$= (x_p \times x_{p+1} \times ... \times x_n) \times (y_p \times y_{p+1} \times ... \times y_n) = (\prod\limits_{k=p}^{n} x_k) \times (\prod\limits_{k=p}^{n} y_k)$

$\prod\limits_{k=p}^{n} x_k^\lambda = x_p^\lambda \times x_{p+1}^\lambda \times ... \times x_n^\lambda = (x_p \times x_{p+1} \times x_n)^\lambda = (\prod\limits_{k=p}^{n} x_k)^\lambda$

□

Proposition (Relation de Chasles)**.**

Si $p < q < n$, $\sum\limits_{k=p}^{n} x_k = \sum\limits_{k=p}^{q} x_k + \sum\limits_{k=q+1}^{n} x_k$ et $\prod\limits_{k=p}^{n} x_k = \prod\limits_{k=p}^{q} x_k \times \prod\limits_{k=q+1}^{n} x_k$

Démonstration. $\sum\limits_{k=p}^{q} x_k + \sum\limits_{k=q+1}^{n} x_k = (x_p + x_{p+1} + ... + x_q) + (x_{q+1} + ... + x_n)$

$= x_p + x_{p+1} + ... + x_q + x_{q+1} + ... + x_n = \sum\limits_{k=p}^{n} x_k$

$\prod\limits_{k=p}^{q} x_k \times \prod\limits_{k=q+1}^{n} x_k = (x_p \times x_{p+1} \times ... \times x_q) \times (x_{q+1} \times ... \times x_n)$

$= x_p \times x_{p+1} \times ... \times x_q \times x_{q+1} \times ... \times x_n = \prod\limits_{k=p}^{n} x_k$

□

Proposition (Réindexation)**.**

$\sum\limits_{k=p}^{n} x_{k+d} = \sum\limits_{l=p+d}^{n+d} x_l$ et $\prod\limits_{k=p}^{n} x_{k+d} = \prod\limits_{l=p+d}^{n+d} x_l$
(changement d'indice $l = k + d$: lorsque k varie entre p et n, l varie entre $p + d$ et $n + d$)

Démonstration. $\sum\limits_{k=p}^{n} x_{k+d} = x_{p+d} + x_{p+1+d} + ... + x_{n+d} = x_{p+d} + x_{p+d+1} + ... + x_{n+d} = \sum\limits_{l=p+d}^{n+d} x_l$

$\prod\limits_{k=p}^{n} x_{k+d} = x_{p+d} \times x_{p+1+d} \times ... \times x_{n+d} = x_{p+d} \times x_{p+d+1} \times ... \times x_{n+d} = \prod\limits_{l=p+d}^{n+d} x_l$

□

3 Formule du binôme de Newton

Définition.

Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$.

On appelle "k parmi n" l'entier $\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & si \quad k \leq n \\ 0 & si \quad k > n \end{cases}$

Proposition.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [[0, n]]$. $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$

Proposition (Relation de Pascal)**.**

Soit $(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

Proposition (Formule du binôme de Newton)**.**

Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{n}b^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}a^{n-k}b^k$.

4 Le télescopage

Proposition.

$\sum\limits_{k=p}^{n}(x_k - x_{k+1}) = x_p - x_{n+1}$ et $\prod\limits_{k=p}^{n} \frac{x_k}{x_{k+1}} = \frac{x_p}{x_{n+1}}$
$\sum\limits_{k=p}^{n}(x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_p$ et $\prod\limits_{k=p}^{n} \frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{x_{n+1}}{x_p}$
$\sum\limits_{k=p}^{n}(x_{k-1} - x_k) = x_{p-1} - x_n$ et $\prod\limits_{k=p}^{n} \frac{x_{k-1}}{x_k} = \frac{x_{p-1}}{x_n}$
$\sum\limits_{k=p}^{n}(x_k - x_{k-1}) = x_n - x_{p-1}$ et $\prod\limits_{k=p}^{n} \frac{x_k}{x_{k-1}} = \frac{x_n}{x_{p-1}}$
(Dans chaque cas il ne reste que les deux termes de plus petit et de plus grand indice)

Démonstration.
$\sum\limits_{k=p}^{n}(x_k - x_{k+1}) = (x_p - x_{p+1}) + (x_{p+1} - x_{p+2}) + (x_{p+2} - x_{p+3}) \ldots + (x_n - x_{n+1}) = x_p - x_{n+1}$
$\prod\limits_{k=p}^{n} \frac{x_k}{x_{k+1}} = \frac{x_p}{x_{p+1}} \frac{x_{p+1}}{x_{p+2}} \frac{x_{p+2}}{x_{p+3}} \cdots \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{x_p}{x_{n+1}}$
Le reste se prouve de manière similaire.

$\square$

5 Identité remarquable $a^n - b^n$ et somme $1 + q + ... + q^n$.

Proposition.

Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + b^{n-1}) = (a-b)\sum\limits_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k$

Proposition.

Soit $q \in \mathbb{K} \setminus \{1\}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. $1 + q + q^2 + ... + q^n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

Démonstration. $1 - q^{n+1} = 1^{n+1} - q^{n+1} = (1-q)\sum\limits_{k=0}^{n} 1^{n-k}q^k = (1-q)\sum\limits_{k=0}^{n} q^k$ donc $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $\square$