Résumé du chapitre 16: limites de suites

Table des matières

1 Définition de la convergence

Définition.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
On dit que u converge vers un réel l ssi :
$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \epsilon$
On dit que u diverge ssi u ne converge pas.

Démonstrations de résultats sur la convergence

Proposition.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles.
On suppose que u converge vers l_1 et v converge vers l_2. Alors $u + v$ converge vers $l_1 + l_2$.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$.

(Montrons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N \Rightarrow |(u_n + v_n) - (l_1 + l_2)| \leq \epsilon$)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|(u_n + v_n) - (l_1 + l_2)| = |(u_n - l_1) + (v_n - l_2)| \leq |u_n - l_1| + |v_n - l_2|$
(Appliquons la convergence de u vers l_1 avec $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2}$)
u converge vers l_1 donc il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l_1| \leq \frac{\epsilon}{2}$.
(Appliquons la convergence de v vers l_2 avec $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2}$)
v converge vers l_2 donc il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N_2 \Rightarrow |v_n - l_2| \leq \frac{\epsilon}{2}$.
Posons $N = max(\{N_1, N_2\})$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N \Rightarrow n \geq N_1 \, et \, n \geq N_2 \Rightarrow |u_n - l_1| \leq \frac{\epsilon}{2} et |v_n - l_2| \leq \frac{\epsilon}{2}$
$\Rightarrow |u_n - l_1| + |v_n - l_2| \leq \epsilon \Rightarrow |(u_n + v_n) - (l_1 + l_2)| \leq \epsilon$
Donc $u + v$ converge vers $l_1 + l_2$.

□

Proposition.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
On suppose que u converge vers l. Alors λu converge vers λl

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$.

(Montrons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N \Rightarrow |\lambda u_n - \lambda l| \leq \epsilon$)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\lambda u_n - \lambda l| = |\lambda||u_n - l|$.
(Appliquons la convergence de u vers l avec $\epsilon' = \frac{\epsilon}{|\lambda|}$)
Ecartons le cas simple $\lambda = 0$.
u converge vers l donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \frac{\epsilon}{|\lambda|}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \frac{\epsilon}{|\lambda|} \Rightarrow |\lambda||u_n - l| \leq \epsilon \Rightarrow |\lambda u_n - \lambda l| \leq \epsilon$
Donc λu converge vers λl. □

2 Résultats sur la convergence

Proposition (Théorèmes opératoires)**.**

- Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)$ des suites réelles. Si u converge vers un réel l_1 et v converge vers un réel l_2 alors $u + v$ converge vers $l_1 + l_2$.
- Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si u converge vers un réel l alors λu converge vers λl.
- Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)$ des suites réelles. Si u converge vers un réel l_1 et v converge vers un réel l_2 alors uv converge vers $l_1 l_2$.
- Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Si u converge vers un réel l et $l \neq 0$ alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in [[N, +\infty[[$, $u_n \neq 0$ et $\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{l}$.
- Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)$ des suites réelles. Si u converge vers un réel l_1 et v converge vers un réel l_2 et $l_2 \neq 0$ alors $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{l_1}{l_2}$.

Proposition.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{R}}$ une suite réelle.
On suppose que u converge vers un réel l. Alors $|u|$ converge vers $|l|$.

Proposition.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Si u admet une limite réelle alors celle-ci est unique, appelée la limite de u et notée $\lim\limits_{+\infty} u$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Proposition.

Toute suite réelle convergente est bornée

Proposition.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Soit $a \in \mathbb{R}$.

- Si u converge vers un réel l et $l < a$.
  alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in [\![N, +\infty[\![$, $u_n < a$
- Si u converge vers un réel l et $l > a$.
  alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in [\![N, +\infty[\![$, $u_n > a$.

3 Définition de la divergence vers $\pm\infty$

Définition.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
On dit que u diverge vers $+\infty$ ssi :
$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \geq A$
On dit que u diverge vers $-\infty$ ssi :
$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \leq A$

4 Résultat sur les suites divergeant vers $\pm\infty$

Proposition.

- Toute suite réelle divergeant vers $+\infty$ est minorée non majorée.
- Toute suite réelle divergeant vers $-\infty$ est majorée non minorée.

5 Limites dans $\overline{\mathbb{R}}$

Propriété.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Si admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, celle-ci est unique, appelée la limite de u et noté $\lim\limits_{\infty} u$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

6 Théorèmes d'existence de limites

6.a Théorèmes opératoires

6.b Théorèmes utilisant des inégalités

Théorème (Théorème de convergence par encadrement)**.**

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suites réelles. Soit $l \in \mathbb{R}$.
On suppose que

— $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$

— $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} l$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{\to} l$

Alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\to} l$

Théorème.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles.

— Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ (théorème de divergence par minoration)

— Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\to} -\infty$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} -\infty$ (théorème de divergence par majoration)

Théorème (Théorème de convergence par majoration de la distance)**.**

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles. Soit $l \in \mathbb{R}$.
On suppose que :

— $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - l| \leq v_n$

— $v_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$

Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} l$.

Proposition.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles.
On suppose que u converge vers 0 et v est bornée . Alors uv converge vers 0.

Proposition.

— Soit $a \in]1, +\infty[$. $a^n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$

— Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $|a| < 1$. $a^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$

6.c Théorème de la limite monotone

Théorème.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante.
Premier cas : u est majorée. Alors u converge vers un réel l et $l = sup\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$
Second cas : u n'est pas majorée. Alors u diverge vers $+\infty$.

Démonstration.

Premier cas : u est majorée. Posons $l = sup(\{u_n | n \in \mathbb{N}\})$.
Soit $\epsilon > 0$. D'après la caractérisation de la borne supérieure, il existe N tel que $l - \epsilon < u_N$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N \Rightarrow l - \epsilon < u_N \leq u_n \leq l \Rightarrow l - \epsilon < u_n \leq l \Rightarrow |u_n - l| \leq \epsilon$.
Donc u converge vers l.
Second cas : u n'est pas majorée.
Soit $A \in \mathbb{R}$.
u n'est pas majorée donc A n'est pas majorant de u donc il existe N tel que $u_N > A$.
Pour tout $n \geq N$, $n \geq N \Rightarrow u_n \geq u_N > A \Rightarrow u_n \geq A$. Donc u diverge vers $+\infty$.

□

Théorème.

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante.
Premier cas : u est minorée. Alors u converge vers un réel l et $l = inf\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$
Second cas : u n'est pas minorée. Alors u diverge vers $-\infty$.

6.d Suites adjacentes

Définition.

Deux suites réelles $u = (u_n)$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont dites adjacentes ssi :
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.
- u est croissante et v est décroissante.
- u et v convergent vers un même réel l

Proposition.

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que u est croissante, v est décroissante et $v - u$ converge vers 0. Alors u et v sont adjacentes.

6.e Suites extraites

Définition.

On appelle suite extraite d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$
où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.

Propriété.

Si une suite admet une limite, alors toute ses suites extraites admettent la même limite.

Proposition.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.
On suppose que $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ admettent une même limite L.
Alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet L pour limite.

7 Passage à la limite dans les inégalités larges

Proposition.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $a \in \mathbb{R}$.
- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq a$ et u converge vers l alors $l \leq a$.
- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq a$ et u converge vers l alors $l \geq a$.

Corollaire.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles.
On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ et u et v convergent vers l_1 et l_2. Alors $l_1 \leq l_2$.

8 Suites récurrentes

8.a Problème d'existence d'une suite récurrente, intervalle stable

Définition.

Soit $f : D \to \mathbb{R}$. On appelle intervalle stable par f tout intervalle I inclus dans D tel que $f(I) \subset I$, i.e. pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$.

8.b Monotonie d'une suite récurrente

8.c Limite d'une suite récurrente, point fixe

Définition.

Soit $f : D \to \mathbb{R}$. On appelle point fixe de f tout élement α de D tel que $f(\alpha) = \alpha$.

9 Suites complexes

Définition.

Soit $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On dit que z converge vers un complexe l ssi :
$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |z_n - l| \leq \epsilon$
On dit que z diverge ssi z ne converge pas.

Proposition.

Soit $q \in \mathbb{C}$ tel que $|q| < 1$. $q^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Proposition.

Soit $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. Soit $l = l_1 + il_2 \in \mathbb{C}$.
On note $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites partie réelle et imaginaire de z
z converge vers $l \Leftrightarrow x$ converge vers l_1 et y converge vers l_2