Résumé du chapitre 17: limites de fonctions

Table des matières

1 Définition des limites réelles

Définition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$.
On dit que f admet un réel l pour limite en a ssi :
cas $a \in \mathbb{R}$: $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall x \in I$, $|x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon$
cas $a = +\infty$: $\forall \epsilon > 0$, $\exists B \in \mathbb{R}$, $\forall x \in I$, $x \geq B \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon$
cas $a = -\infty$: $\forall \epsilon > 0$, $\exists B \in \mathbb{R}$, $\forall x \in I$, $x \leq B \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon$

2 Résultats sur les limites réelles

Proposition (Théorèmes opératoires)**.**

— Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. On suppose que f et g admettent en a des limites réelles l_1 et l_2. Alors $f + g$ admet en a la limite $l_1 + l_2$.

— Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que f admet en a la limite réelle l. Alors λf admet en a la limite λl.

— Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. On suppose que f et g admettent en a des limites réelles l_1 et l_2. Alors fg admet en a la limite $l_1 l_2$.

— Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. On suppose que f admet en a la limite réelle l et $l \neq 0$. Alors pour tout x dans un voisinage de a, $f(x) \neq 0$ et $\frac{1}{f(x)} \underset{x \to a}{\to} \frac{1}{l}$.

— Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. On suppose que f et g admettent en a des limites réelles l_1 et l_2 et $l_2 \neq 0$. Alors $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\to} \frac{l_1}{l_2}$.

Proposition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. On suppose que f admet en a la limite réelle l. Alors $|f|$ admet $|l|$ pour limite en a.

Proposition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. Si f admet une limite réelle en a, celle-ci est unique appelée la limite de f en a et est notée $\lim_a f$ ou $\lim_{x \to a} f(x)$.

Proposition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. Si f admet une limite réelle en a alors f est bornée sur un voisinage de a.

Proposition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. Soit $c \in \mathbb{R}$.
Si f admet pour limite en a un réel l et $l < c$
alors pour tout x dans un voisinage de a, $f(x) < c$.
Si f admet pour limite en a un réel l et $l > c$
alors pour tout x dans un voisinage de a, $f(x) > c$.

3 Définition des limites infinies

Définition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$.

- On dit que f admet $+\infty$ pour limite en a ssi :
  cas $a \in \mathbb{R}$: $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq A$
  cas $a = +\infty$: $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geq B \Rightarrow f(x) \geq A$
  cas $a = -\infty$: $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leq B \Rightarrow f(x) \geq A$
- On dit que f admet $-\infty$ pour limite en a ssi :
  cas $a \in \mathbb{R}$: $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \Rightarrow f(x) \leq A$
  cas $a = +\infty$: $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geq B \Rightarrow f(x) \leq A$
  cas $a = -\infty$: $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leq B \Rightarrow f(x) \leq A$

4 Résultats sur les limites infinies

Proposition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$.
Si f admet $+\infty$ pour limite en a, f est minorée sur un voisinage de a et non majorée.
Si f admet $-\infty$ pour limite en a, f est majorée sur un voisinage de a et non minorée.

5 Limites dans $\overline{\mathbb{R}}$

Proposition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$.
Si f admet en a une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, celle-ci est unique, appelée la limite de f en a et notée $\lim_a f$ ou $\lim_{x \to a} f(x)$.

Proposition.

Soit a un point I qui n'est pas une extrémité de I. Soit $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$. Soit $L \in \overline{\mathbb{R}}$.
$f(x) \underset{x \to a}{\to} L \Leftrightarrow f(x) \underset{x \to a^+}{\to} L \, et \, f(x) \underset{x \to a^-}{\to} L$

6 Théorèmes d'existence de limites

6.a Théorèmes opératoires

Proposition (Théorème opératoire de composition)**.**

Soit $f : I \to J$ et $a \in \overline{I}$. Soit $g : J \to \mathbb{R}$. Soit $L \in \overline{\mathbb{R}}$ et $M \in \overline{\mathbb{R}}$.
On suppose que $f(x) \underset{x \to a}{\to} L$ et $g(y) \underset{y \to L}{\to} M$. Alors $g(f(x)) \underset{x \to a}{\to} M$.

6.b Théorèmes utilisant des inégalités

Théorème (Théorème de convergence par encadrement)**.**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$, $h : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. Soit $l \in \mathbb{R}$.
On suppose que :
- $\forall x \in I$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.
- $f(x) \underset{x \to a}{\to} l$ et $h(x) \underset{x \to a}{\to} l$.

Alors $g(x) \underset{x \to a}{\to} l$

Théorème.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$.
Si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$ et $f(x) \underset{x \to a}{\to} +\infty$ alors $g(x) \underset{x \to a}{\to} +\infty$
(théorème de divergence par minoration)
Si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$ et $g(x) \underset{x \to a}{\to} -\infty$ alors $f(x) \underset{x \to a}{\to} -\infty$
(théorème de divergence par majoration)

Théorème (Théorème de convergence par majoration de la distance)**.**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. Soit $l \in \mathbb{R}$. On suppose que :
- $\forall x \in I, |f(x) - l| \leq g(x)$
- $g(x) \underset{x \to a}{\to} 0$

Alors $f(x) \underset{x \to a}{\to} l$

Proposition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. On suppose que f admet 0 pour limite en a et g est bornée. Alors fg admet 0 pour limite en a.

6.c Théorème de la limite monotone

Théorème (théorème de la limite monotone)**.**

Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ monotone. Alors f admet une limite en a et f admet une limite en b. (a peut être égal à $-\infty$ et b peut être égal à $+\infty$)

7 Passage à la limite dans les inégalités larges

Proposition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. Soit $c \in \mathbb{R}$.
Si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq c$ et f admet un réel l pour limite en a alors $l \leq c$.
Si pour tout $x \in I$, $f(x) \geq c$ et f admet un réel l pour limite en a alors $l \geq c$.

Corollaire.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. On suppose pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$ et f et g admettent des réels l_1 et l_2 pour limite en a. Alors $l_1 \leq l_2$.

8 Fonctions complexes

Définition.

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ et $a \in \overline{I}$. On dit que f admet un complexe l pour limite en a ssi :
cas $a \in \mathbb{R}$: $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall t \in I$, $|t - a| \leq \delta \Rightarrow |f(t) - l| \leq \epsilon$
cas $a = +\infty$: $\forall \epsilon > 0$, $\exists B \in \mathbb{R}$, $\forall t \in I$, $t \geq B \Rightarrow |f(t) - l| \leq \epsilon$
cas $a = -\infty$: $\forall \epsilon > 0$, $\exists B \in \mathbb{R}$, $\forall t \in I$, $t \leq B \Rightarrow |f(t) - l| \leq \epsilon$

Proposition (Caractérisation d'une limite complexe par les parties réelles et imaginaires)**.**

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ et $a \in \overline{I}$. On note $x : I \to \mathbb{R}$ et $y : I \to \mathbb{R}$ les parties réelle et imaginaire de f. Soit $l = l_1 + il_2 \in \mathbb{C}$. $f(t) \underset{t \to a}{\to} l \Leftrightarrow x(t) \underset{t \to a}{\to} l_1 \, et \, y(t) \underset{t \to a}{\to} l_2$.