Résumé du chapitre 19: continuité

Table des matières

1 Définitions

Définition-Propriété.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que f est continue en a ssi f admet une limite finie en a.
Dans ce cas, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Proposition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. f est continue en $a \Leftrightarrow f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} f(a)$

Définition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.
- On suppose que a n'est pas l'extrémité supérieure de I.
  On dit que f est continue à droite en a ssi $f(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} f(a)$.
- On suppose que a n'est pas l'extrémité inférieure de I.
  On dit que f est continue à gauche en a ssi $f(x) \underset{x \to a^-}{\longrightarrow} f(a)$.

Proposition.

Soit a un point de I qui n'est pas une extrémité de I et $f : I \to \mathbb{R}$.
f est continue en $a \Leftrightarrow f$ est continue à gauche et à droite en a

Définition.

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite continue ssi elle est continue en tout point de I.

2 Propriétés élémentaires

2.a Théorèmes opératoires

Proposition (Théorèmes opératoires)**.**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ continues. Alors $f + g$ est continue.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors λf est continue.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ continues. Alors fg est continue.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et ne s'annulant pas. Alors $\frac{1}{f}$ est continue.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et $g : I \to \mathbb{R}$ continue ne s'annulant pas. Alors $\frac{f}{g}$ est continue.

Démonstration. Montrons seulement le théorème opératoire de somme. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ continues. Montrer que $f + g$ est continue. Soit $a \in I$. f et g continues en a donc $f(x) \underset{x \to a}{\to} f(a)$ et $g(x) \underset{x \to a}{\to} g(a)$ donc $f(x) + g(x) \underset{x \to a}{\to} f(a) + g(a)$ donc $f + g$ continue en a. $f + g$ est continue en tout point de I donc $f + g$ est continue. $\square$

Proposition (Théorème opératoire de composition)**.**

Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ continues. Alors $g \circ f$ est continue.

Démonstration. Soit $a \in I$. f est continue en a et g est continue en $f(a)$ donc $f(x) \underset{x \to a}{\to} f(a)$ et $g(y) \underset{y \to f(a)}{\to} g(f(a))$ donc $g(f(x)) \underset{x \to a}{\to} g(f(a))$ donc $g \circ f$ continue en a. $g \circ f$ est continue en tout point de I donc $g \circ f$ est continue. $\square$

2.b La notion de continuité en un point est locale

2.c Prolongement par continuité en un point

Proposition.

Soit $a \in I$ et $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$.
f admet un prolongement par continuité en $a \Leftrightarrow f$ admet un réel l pour limite en a
Dans ce cas, la fonction $g : I \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \neq a \\ l & si \quad x = a \end{cases}$ est l'unique prolongement de f par continuité en a.

2.d Apport de la continuité aux limites

3 Propriétés globales des fonctions continues sur un intervalle

3.a Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires)**.**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et $(a, b) \in I^2$.
Soit t un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ (i.e. $f(a) \leq t \leq f(b)$ ou $f(b) \leq t \leq f(a)$).
Alors il existe un réel c compris entre a et b (i.e. $a \leq c \leq b$ ou $b \leq c \leq a$) tel que $t = f(c)$.

Corollaire.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Alors $J = f(I)$ est intervalle.
(L'image directe d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle)

3.b Théorème de la bijection et théorème de continuité de la réciproque

Théorème (Théorème de la bijection)**.**

Soit f continue strictement monotone sur I. Posons $J = f(I)$. Alors f induit une bijection de I dans J. Autrement dit, l'application $g : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & J \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$ est bijective.

Proposition.

Soit $g : I \to J$ une bijection strictement monotone.
Alors g^{-1} est strictement monotone de même sens de variation que g.

Théorème (Théorème de continuité de la réciproque)**.**

Soit $g : I \to J$ une bijection continue strictement monotone. Alors g^{-1} est continue.

3.c Théorème des bornes atteintes

Théorème (Théorème des bornes atteintes)**.**

On appelle segment tout intervalle fermé borné $[a, b]$ avec $a \leq b$.
Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.
Autrement dit :
Toute fonction continue sur un segment admet un minimum et un maximum.

4 Fonctions complexes

Proposition (Caractérisation de la continuité par les parties réelle et imaginaire)**.**

Soit $f : I \to \mathbb{C}$. Notons $x : I \to \mathbb{R}$ et $y : I \to \mathbb{R}$ les parties réelle et imaginaire de f.
f est continue $\Leftrightarrow$ x et y sont continues