Résumé du chapitre 20: dérivation

Table des matières

1 Définitions

Définition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

On dit f est dérivable en a ssi $\left\{\begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}\right.$ admet une limite finie en a.

(le taux d'accroissement de f en a admet une limite finie en a)

Dans ce cas, on appelle nombre dérivé de f au point a le réel $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Définition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$

— On suppose que a n'est pas l'extrémité supérieure de I. On dit que f est dérivable à droite en a ssi $\begin{cases} I \setminus \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{cases}$ a une limite finie à droite en a.
Dans ce cas, on appelle nombre dérivé de f à droite en a le réel $f'_d(a) = \lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

— On suppose a n'est pas l'extrémité inférieure de I. On dit que f est dérivable à gauche en a ssi $\begin{cases} I \setminus \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{cases}$ a une limite finie à gauche en a.
Dans ce cas, on appelle nombre dérivé de f à gauche a en le réel $f'_g(a) = \lim\limits_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Proposition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On suppose que a n'est pas une extrémité de I.
f est dérivable en a $\Leftrightarrow$ f est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$
Dans ce cas, $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.

Définition.

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite dérivable ssi f est dérivable en tout point de I.
Dans ce cas, on appelle fonction dérivée de f la fonction $f' : \begin{cases} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{cases}$

2 Propriétés élémentaires

2.a Dérivabilité implique continuité

Proposition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
f est dérivable $\Rightarrow$ f est continue

Démonstrations de théorèmes opératoires

Proposition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ dérivables.
Alors $f + g$ est dérivable et $(f + g)' = f' + g'$

Démonstration. Soit $a \in I$.
$\frac{(f(x)+g(x))-(f(a)+g(a))}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \underset{x \to a}{\to} f'(a) + g'(a)$.
Donc $f + g$ en dérivable en a et $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
$f + g$ est dérivable en tout point de I donc $f + g$ est dérivable. $(f + g)' = f' + g'$.

$\square$

Proposition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ dérivables.
Alors fg est dérivable et $(fg)' = f'g + fg'$

Démonstration. Soit $a \in I$.
$\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} = \frac{(f(x)-f(a))g(x)+f(a)(g(x)-g(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x) + f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$
$\underset{x\to a}{\to} f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
Donc fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
fg est dérivable en tout point de I donc fg est dérivable. $(fg)' = f'g + fg'$

□

2.b Théorèmes opératoires

Proposition (Théorèmes opératoires)**.**

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ dérivables. Alors $f+g$ est dérivable et $(f+g)' = f'+g'$.
- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors λf est dérivable et $(\lambda f)' = \lambda f'$.
- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ dérivables.
  Alors fg est dérivable et $(fg)' = f'g + fg'$ (règle de Leibnitz).
- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable ne s'annulant pas. Alors $\frac{1}{f}$ est dérivable et $(\frac{1}{f})' = -\frac{f'}{f^2}$.
- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable et $g : I \to \mathbb{R}$ dérivable ne s'annulant pas.
  Alors $\frac{f}{g}$ est dérivable et $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$.

Proposition (Théorème opératoire de composition)**.**

Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ dérivables. Alors $g \circ f$ est dérivable et $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$.

Théorème (Théorème de dérivabilité de la réciproque)**.**

Soit $g : I \to J$ bijective dérivable strictement monotone.
On suppose que g' ne s'annule pas. Alors g^{-1} est dérivable et $(g^{-1})' = \frac{1}{g' \circ g^{-1}}$.

2.c Dérivées usuelles

Proposition.

exp est dérivable et $exp' = exp$.
ln est dérivable et pour tout $x \in]0, +\infty[$, $ln'(x) = \frac{1}{x}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^n$ est dérivable
et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = nx^{n-1}$.
Soit $k \in \mathbb{Z}$. $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^k$ est dérivable
et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = kx^{k-1}$
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^\alpha$ est dérivable
et pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.
$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ est dérivable
et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.
$f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$
et pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
ch et sh sont dérivables et $\text{ch}' = \text{sh}$ et $\text{sh}' = \text{ch}$.
cos et sin sont dérivables et $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$.
tan est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.
$\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est dérivable sur $]-1, 1[$
et pour tout $x \in]-1, 1[$, $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ est dérivable sur $]-1, 1[$
et pour tout $x \in]-1, 1[$, $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Proposition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Alors $exp \circ f$ est dérivable et $(\exp \circ f)' = (exp \circ f) \times f'$.
Soit $f : I \to]0, +\infty[$ dérivable. Alors $ln \circ f$ est dérivable et $(ln \circ f)' = \frac{f'}{f}$.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f^n est dérivable et $(f^n)' = nf^{n-1}f'$.
Soit $f : I \to \mathbb{R}^*$ dérivable. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, f^k est dérivable et $(f^k)' = kf^{k-1}f'$.
Soit $f : I \to]0, +\infty[$ dérivable. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, f^α est dérivable et $(f^\alpha)' = \alpha f^{\alpha-1}f'$.
Soit $f : I \to]0, +\infty[$ dérivable. Alors $\sqrt{f}$ est dérivable et $(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. $\arctan \circ f$ est dérivable et $(\arctan \circ f)' = \frac{f'}{1+f^2}$.
Soit $f : I \to]-1, 1[$ dérivable. $\arcsin \circ f$ est dérivable et $(\arcsin \circ f)' = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$.
Soit $f : I \to]-1, 1[$ dérivable. $\arccos \circ f$ est dérivable et $(\arccos \circ f)' = \frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}$.

2.d La notion de dérivabilité en un point est locale

2.e Extremum local

Définition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.
On dit que f atteint un maximum local en a ssi :
$\exists \delta > 0,\ \forall x \in I \cap [a - \delta, a + \delta],\ f(x) \leq f(a)$.
On dit que f atteint un minimum local en a ssi :
$\exists \delta > 0, \forall x \in I \cap [a - \delta, a + \delta],\ f(x) \geq f(a)$.
Le terme extremum local désigne un minimum local ou un maximum local

Proposition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en un point a de I qui n'est pas une extremité de I.
On suppose que f atteint un extremum local en a. Alors $f'(a) = 0$.

3 Propriétés globales des fonctions dérivables sur un intervalle

3.a Théorème de Rolle

Théorème (Théorème de Rolle)**.**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$
On suppose que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

3.b Théorème et inégalité des accroissements finis

Théorème (Théorème des accroissements finis)**.**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Proposition (Inégalité des accroissements finis)**.**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que f' est bornée.
Il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq C$.
Alors pour tout $(x, y) \in I^2$, $|f(y) - f(x)| \leq C|y - x|$. On dit que f est C-lipschitzienne.

3.c Théorème de la limite de la dérivée

Théorème (Théorème de la limite de la dérivée)**.**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit $L \in \overline{\mathbb{R}}$.
On suppose f continue sur I, f dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et $f'(x) \underset{x\to a}{\to} L$. Alors $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\to} L$.
En particulier :
si $L \in \mathbb{R}$ alors f est dérivable en a et $f'(a) = L$
si $L = +\infty$ ou $L = -\infty$ alors f n'est pas dérivable en a

3.d Dérivée et sens de variations

Proposition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable.
f est constante $\Leftrightarrow$ f' est nulle
f est croissante $\Leftrightarrow$ f' est positive
f est décroissante $\Leftrightarrow$ f' est négative

Corollaire.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable.
f est strictement croissante
$\Leftrightarrow f'$ est positive et il n'existe pas d'intervalle ni vide ni singleton sur lequel f' est nulle
f est strictement décroissante
$\Leftrightarrow f'$ est négative et il n'existe pas d'intervalle ni vide ni singleton sur lequel f' est nulle

Corollaire.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable.
Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ sauf éventuellement en un nombre fini de points où f' s'annule alors f est strictement croissante.
Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$ sauf éventuellement en un nombre fini de points où f' s'annule alors f est strictement décroissante.

4 Dérivées successives, fonctions de classe C^n

4.a Définition des dérivées successives

Définition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

- On convient que f est 0 fois dérivable et on pose $f^{(0)} = f$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f est $n+1$ fois dérivable ssi f est n fois dérivable et $f^{(n)}$ est dérivable. Dans ce cas, on pose $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si f est n fois dérivable, $f^{(n)}$ est appelée la dérivée n-ième de f.
On dit que f est indéfiniment dérivable ssi f est n fois dérivable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4.b Définition des fonctions de classe C^n

Définition.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite de classe C^n ssi f est n fois dérivable et $f^{(n)}$ est continue.
Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite de classe C^∞ ssi elle est de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4.c Théorèmes opératoires

Proposition (Théorèmes opératoires)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}$.

— Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ de classe C^n.
Alors $f + g$ est de classe C^n et $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$.

— Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^n et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors λf est de classe C^n et $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$.

— Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ de classe C^n.
Alors fg est de classe C^n et $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$ (formule de Leinitz).

— Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^n ne s'annulant pas. Alors $\frac{1}{f}$ est de classe C^n.

— Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^n et $g : I \to \mathbb{R}$ de classe C^n ne s'annulant pas.
Alors $\frac{f}{g}$ est de classe C^n.

Proposition (Théorème opératoire de composition)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ de classe C^n. Alors $g \circ f$ est de classe C^n.

Proposition (Théorème opératoire pour la réciproque)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $g : I \to J$ une bijection strictement monotone de classe C^n .
On suppose que g' ne s'annule pas. Alors g^{-1} est de classe C^n.

5 Fonctions complexes

5.a Définitions

5.b Propriétés élémentaires

Proposition.

Soit $f : I \to \mathbb{C}$. On note $x : I \to \mathbb{R}$ et $y : I \to \mathbb{R}$ les parties réelle et imaginaire de f
f est dérivable $\Leftrightarrow$ x et y sont dérivables. Dans ce cas, $f' = x' + iy'$.

Proposition.

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ dérivable. Alors e^f est dérivable et $(e^f)' = e^f f'$.

5.c Propriétés globales des fonctions dérivables

Proposition (inégalité des accroissements finis)**.**

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ dérivable. On suppose que f' est bornée.
Il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $t \in I$, $|f'(t)| \leq C$.
Alors pour tout $(s,t) \in I^2$, $|f(s) - f(t)| \leq C|s-t|$. On dit que f est C-lipschitzienne.

Proposition.

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ dérivable. f est constante $\Leftrightarrow$ f' est nulle.

5.d Dérivées successives, fonctions de classe C^n

Proposition.

Soit $f : I \to \mathbb{C}$. On note $x : I \to \mathbb{R}$ et $y : I \to \mathbb{R}$ les parties réelle et imaginaire de f.
f est de classe $C^n \Leftrightarrow x$ et y sont de classe C^n. Dans ce cas, $f^{(n)} = x^{(n)} + iy^{(n)}$