Résumé du chapitre 22: matrices

Table des matières

1 Définitions **1**

2 Opérations **1**
- 2.a Somme et multiplication par un scalaire 1
- 2.b Produit 1

3 Espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **2**
- 3.a Opérations 2
- 3.b Propriétés manquant au produit matriciel 2
- 3.c Cas des matrices diagonales et triangulaires 2
- 3.d Puissances 2
- 3.e Matrices inversibles 3

4 Transposée **3**

1 Définitions

2 Opérations

2.a Somme et multiplication par un scalaire

Définition.

- La somme de deux matrices $M = (a_{i,j})_{(i,j)\in[[1,n]]\times[[1,p]]}$ et $N = (b_{i,j})_{(i,j)\in[[1,n]]\times[[1,p]]}$ de taille (n,p) est la matrice $M+N = (c_{i,j})_{(i,j)\in[[1,n]]\times[[1,p]]}$ de taille (n,p) définie par :
  $\forall (i,j) \in [[1,n]] \times [[1,p]]$, $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$
- La multiplication d'une matrice $M = (a_{i,j})_{(i,j)\in[[1,n]]\times[[1,p]]}$ de taille (n,p) par un scalaire λ est la matrice $\lambda \cdot M = (b_{i,j})_{(i,j)\in[[1,n]]\times[[1,p]]}$ de taille (n,p) définie par :
  $\forall (i,j) \in [[1,n]] \times [[1,p]]$, $b_{i,j} = \lambda a_{i,j}$

2.b Produit

Définition.

On appelle produit d'une matrice $M = (a_{i,j})_{(i,j)\in[[1,n]]\times[[1,p]]}$ de taille (n,p)
et d'une matrice $N = (b_{j,k})_{(j,k)\in[[1,p]]\times[[1,q]]}$ de taille (p,q)
la matrice $M \times N = (c_{i,k})_{(i,k)\in[[1,n]]\times[[1,q]]}$ de taille (n,q) définie par :

$$\forall (i,k) \in [[1,n]] \times [[1,q]], c_{i,k} = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} b_{j,k}$$

Définition.

On appelle matrice identité de taille n et on note I_n la matrice carrée de taille n
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3 Espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

3.a Opérations

3.b Propriétés manquant au produit matriciel

3.c Cas des matrices diagonales et triangulaires

Proposition.

— La somme de deux matrices triangulaires supérieures (resp triangulaires inférieures, resp diagonales) de même taille est triangulaire supérieure (resp triangulaire inférieure, resp diagonale).
— La multiplication d'une matrice triangulaire supérieure (resp triangulaire inférieure, resp diagonale) par un scalaire est triangulaire supérieure (resp triangulaire inférieure, resp diagonale).
— Le produit de deux matrices A et B triangulaires supérieures (resp triangulaires inférieures, resp diagonales) de même taille est triangulaire supérieure (resp triangulaire inférieure, resp diagonale) et chaque coefficient diagonal de AB est le produit des coefficients diagonaux de A et B de mêmes indices.

Démonstration. Montrons seulement le troisième point.

Traitons le cas où A et B sont triangulaires supérieures.
Ecrivons $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[[1,n]]^2}$, $B = (b_{j,k})_{(j,k)\in[[1,n]]^2}$ et $AB = (c_{i,k})_{(i,k)\in[[1,n]]^2}$
A est triangulaire supérieure donc pour tout $(i,j) \in [[1,n]]^2$, $i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$
B est triangulaire supérieure donc pour tout $(j,k) \in [[1,n]]^2$, $j > k \Rightarrow b_{j,k} = 0$
Montrons que AB est triangulaire supérieure. Soit $(i,k) \in [[1,n]]^2$. Montrons $i > k \Rightarrow c_{i,k} = 0$.
Supposons $i > k$. Montrons $c_{i,k} = 0$. $c_{i,k} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,k}$.
Soit $j \in [[1,n]]$.
Premier cas : $i > j$. $a_{i,j} = 0$ donc $a_{i,j}b_{j,k} = 0$.
Second cas : $j \geq i$. $i > k$ donc $j > k$ donc $b_{j,k} = 0$ donc $a_{i,j}b_{j,k} = 0$.
Dans tous les cas, $a_{i,j}b_{j,k} = 0$.
$c_{i,k} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{j,k} = \sum\limits_{j=1}^{n} 0 = 0$. Donc $i > k \Rightarrow c_{i,k} = 0$. Donc AB est triangulaire supérieure.

Soit $i \in [[1,n]]$. Montrons que $c_{i,i} = a_{i,i}b_{i,i}$. $c_{i,i} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{j,i}$. Or pour tout $j \in [[1,n]] \setminus \{i\}$, $i > j$ ou $j > i$ donc $a_{i,j} = 0$ ou $b_{j,i} = 0$ donc $a_{i,j}b_{j,i} = 0$. Donc $c_{i,i} = a_{i,i}b_{i,i}$.

Le cas triangulaire inférieure est similaire au cas triangulaire supérieure. Le cas diagonal se déduit des deux autres cas une matrice diagonale est une matrice à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure.

□

3.d Puissances

Définition.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pose $A^0 = I_n$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $A^p = \underbrace{A \times A \times ... \times A}_{p\,termes}$.

3.e Matrices inversibles

Définition.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On dit que A est inversible ssi il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A \times B = B \times A = I_n$.
Dans ce cas, B est unique appelé l'inverse de A et noté A^{-1}.

Démonstration. Montrons l'unicité.
Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A \times B = B \times A = I_n$. Soit $B' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A \times B' = B' \times A = I_n$.
Montrons que $B = B'$. $B = B \times I_n = B \times (A \times B') = (B \times A) \times B' = I_n \times B' = B'$.
Nous avons montré l'unicité. □

Proposition.

— $\forall (A, B) \in GL_n(\mathbb{K})^2, A \times B \in GL_n(\mathbb{K})\, et\, (A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$.
— $I_n \in GL_n(\mathbb{K})\, et\, I_n^{-1} = I_n$.
— $\forall A \in GL_n(\mathbb{K}), A^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(A^{-1})^{-1} = A$.

Démonstration. Montrons seulement la première assertion.
Soit A et B carrées de taille n inversibles. Posons $C = B^{-1} \times A^{-1}$.
$(A \times B) \times C = A \times B \times B^{-1} \times A^{-1} = A \times I_n \times A^{-1} = A \times A^{-1} = I_n$
$C \times (A \times B) = B^{-1} \times A^{-1} \times A \times B = B^{-1} \times I_n \times B = B^{-1} \times B = I_n$
Donc $A \times B$ est inversible et $(A \times B)^{-1} = C$. $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$
□

4 Transposée

Définition.

La transposée d'une matrice $M = (a_{i,j})_{(i,j) \in [[1,n]] \times [[1,p]]}$ de taille (n, p)
est la matrice $M^\top = (b_{j,i})_{(j,i) \in [[1,p]] \times [[1,n]]}$ de taille (p, n) définie par :
$\forall (j, i) \in [[1, p]] \times [[1, n]]$, $b_{j,i} = a_{i,j}$.

Proposition.

— $\forall M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), (M^\top)^\top = M$ (involution)
— $\forall (M, N) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$, $(M + N)^\top = M^\top + N^\top$
$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), (\lambda \cdot M)^\top = \lambda \cdot M^\top$
(linéarité)
— $\forall (M, N) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(M \times N)^\top = N^\top \times M^\top$
— $\forall M \in GL_n(\mathbb{K}), M^\top \in GL_n(\mathbb{K})\, et\, (M^\top)^{-1} = (M^{-1})^\top$