Résumé du chapitre 23: systèmes linéaires

Table des matières

1 Définitions

2 Utilité du système homogène associé

Proposition.

Soit $(\mathcal{L})$ un système linéaire à n équations et p inconnues.
Notons $(\mathcal{L}_0)$ le système homogène associé.
Soit s une solution de $(\mathcal{L})$ (dite solution particulière).
Alors les solutions de $(\mathcal{L})$ sont les p-uplets de la forme $s+t$ où t est une solution de $(\mathcal{L}_0)$.

3 Opérations élémentaires sur les lignes

4 Utilisation d'un pivot de Gauss et algorithme de Gauss-Jordan

4.a Utilisation d'un pivot de Gauss

4.b Algorithme de Gauss-Jordan

5 Algorithme de résolution d'un système

6 Systèmes linéaires et matrices inversibles

Proposition.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note r le nombre de pivots obtenu en appliquant l'algorithme de Gauss-Jordan à la matrice A. $r \leq n$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $r = n$

ii) Le système homogène $AX = 0_{n,1}$ n'admet que la solution nulle

iii) Pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = Y$ admet une unique solution

iv) A est inversible

Proposition.

Toute matrice triangulaire supérieure (resp triangulaire inférieure) de coefficients diagonaux non nuls est inversible et son inverse est triangulaire supérieure (resp triangulaire inférieure)

7 Matrices d'opérations élémentaires

7.a Sur les lignes

Définition.

Soit Σ une opération élémentaire sur les matrices à n lignes. On appelle matrice de l'opération élémentaire Σ la matrice M_Σ obtenue en effectuant Σ sur les lignes de I_n.

Proposition.

Soit A une matrice à n lignes. En effectuant une opération élémentaire Σ sur les lignes de A on obtient la matrice $M_\Sigma A$.

Proposition.

Une matrice d'opération élémentaire sur les lignes est inversible.

7.b Sur les colonnes

Définition.

Soit σ une opération élémentaire sur les matrices à p colonnes. On appelle matrice de l'opération élémentaire σ la matrice M_σ obtenue en effectuant σ sur les colonnes de I_p.

Proposition.

Soit A une matrice à p colonnes. En effectuant une opération élémentaire σ sur les colonnes de A on obtient la matrice AM_σ.

Proposition.

Une matrice d'opération élémentaire sur les colonnes est inversible.