Résumé du chapitre 28: développements limités (DL)

Table des matières

1 Définition, troncature, unicité **1**

2 DL d'ordre 0 et 1, DL d'une primitive, formule de Taylor-Young **2**
- 2.a DL d'ordre 0 et 1 . . . 2
- 2.b DL d'une primitive . . . 2
- 2.c Formule de Taylor-Young . . . 3

3 Opérations sur les DL **4**
- 3.a Somme et multiplication par un réel . . . 4
- 3.b Produit . . . 4
- 3.c Puissances . . . 5
- 3.d Changement de variable $x = a + h$ . . . 5
- 3.e Inverse . . . 5
- 3.f Quotient . . . 5
- 3.g Composée . . . 5
- 3.h DL d'un quotient en un point d'annulation du dénominateur . . . 5
- 3.i DL de $h \mapsto h^p f(a+h)$ et optimisations . . . 5

4 Applications des DL **5**
- 4.a Equivalents . . . 5
- 4.b Limites . . . 5
- 4.c Position locale de la courbe d'une fonction par rapport à une tangente . . . 5
- 4.d Position locale de la courbe d'une fonction par rapport à une asymptote . . . 5

1 Définition, troncature, unicité

Définition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
On dit que f admet un *DL* d'ordre n en a ssi il existe des réels λ_0,...,λ_n tels que
$f(x) \underset{x \to a}{=} \lambda_0 + \lambda_1(x-a) + \lambda_2(x-a)^2 + ... + \lambda_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$
ce qui équivaut à $f(a+h) \underset{h \to 0}{=} \lambda_0 + \lambda_1 h + \lambda_2 h^2 + ... + \lambda_n h^n + o(h^n)$
(changement de variable $x = a + h$ et $h = x - a$)
Dans ce cas, la fonction polynômiale qui à h associe $\lambda_0 + \lambda_1 h + \lambda_2 h^2 + ... + \lambda_n h^n$ est appelée la partie régulière du DL.

Proposition.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
$\frac{1}{1-x} \underset{x \to 0}{=} 1 + x + x^2 + ... + x^n + o(x^n)$
$\frac{1}{1+x} \underset{x \to 0}{=} 1 - x + x^2 - ... + (-1)^n x^n + o(x^n)$

Démonstration.

— Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$ donc $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}$. Or $\frac{x^{n+1}}{1-x} \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$ car $\frac{\frac{x^{n+1}}{1-x}}{x^n} = \frac{x}{1-x} \underset{x\to 0}{\to} 0$. Donc $\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum\limits_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$.

— $-x \underset{x\to 0}{\to} 0$ et $\frac{1}{1-y} \underset{y\to 0}{=} \sum\limits_{k=0}^{n} y^k + o(y^n)$

donc $\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o((-1)^n x^n)$ donc $\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$

□

Proposition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$.
On suppose que f admet un DL d'ordre n en a :
$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \lambda_0 + \lambda_1 h + ... + \lambda_n h^n + o(h^n)$
On suppose $p < n$. Alors f admet en a le DL d'ordre p :
$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \lambda_0 + \lambda_1 h + ... + \lambda_p h^p + o(h^p)$.
On dit que le DL d'ordre p est obtenu par troncature du DL d'ordre n.

Proposition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Si f admet un DL d'ordre n en a alors celui-ci est unique.

2 DL d'ordre 0 et 1, DL d'une primitive, formule de Taylor-Young

2.a DL d'ordre 0 et 1

Proposition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.
f admet un DL d'ordre 0 en $a \Leftrightarrow f$ est continue en a
Dans ce cas, ce DL est $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + o(1)$.

Proposition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.
f admet un DL d'ordre 1 en $a \Leftrightarrow f$ est dérivable en a
Dans ce cas, ce DL est $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$.

2.b DL d'une primitive

Proposition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
On suppose que f admet un DL d'ordre n en a : $f(x) \underset{x\to a}{=} \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$.
Soit F une primitive de f. Alors F admet le DL d'ordre $n+1$ en a suivant :
$F(x) \underset{x\to a}{=} F(a) + \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1})$.

Proposition.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ..... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$
- Soit $n \in \mathbb{N}$. $\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} ..... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$

Démonstration.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $x \mapsto ln(1+x)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$
  $\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - .... + (-1)^{n-1}x^{n-1} + o(x^{n-1})$
  Par DL d'une primitive, $ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} ln(1) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ..... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$
  $ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ..... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$
- Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction arctan est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$
  $x^2 \underset{x\to 0}{\to} 0$ et $\frac{1}{1+y} \underset{y\to 0}{\to} 1 - y + y^2 - ... + (-1)^n y^n + o(y^n)$
  donc $\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + x^4 - x^6 ..... + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$
  Par DL d'une primitive, $\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} \arctan(0) + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} ..... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$
  $\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} ..... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$

□

2.c Formule de Taylor-Young

Théorème (Formule de Taylor-Young)**.**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que f est n fois dérivable.
Alors f admet en a le DL d'ordre n suivant : $f(x) \underset{x\to a}{=} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$

Proposition.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
- $exp(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + ... + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
  $(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

Démonstration. Plaçons dans le cas $n \in \mathbb{N}^*$ (nécessaire à l'application de la formule de Taylor-young).
- exp est indéfiniment dérivable. $exp' = exp$ donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $exp^{(k)} = exp$.
  exp est n fois dérivable donc, d'après la formule de Taylor-Young

$exp(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{exp^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$
$exp(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + o(x^n)$

— $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^\alpha$ est indéfiniment dérivable. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
$f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-1}$
$f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}$
....
pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}$
f est n fois dérivable donc, d'après la formule de Taylor-Young,
$f(1+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(1)}{k!} h^k + o(h^n)$
$f(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(1)}{k!} x^k + o(x^n)$ (variable muette)
$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$

Le cas $n = 0$ peut s'obtenir par continuité en 0.

□

Proposition.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
- $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
- $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
- $\text{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
- $\text{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$

Proposition.

$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

Démonstration. tan est trois fois dérivable donc, d'après la formule de Taylor-Young,
$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{3} \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^3)$
$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} \tan(0) + \tan'(0)x + \frac{\tan''(0)}{2}x^2 + \frac{\tan'''(0)}{6}x^3 + o(x^3)$
$\tan(0) = 0$
$\tan' = 1 + \tan^2$, $\tan'(0) = 1$
$\tan'' = 2\tan\tan' = 2\tan(1+\tan^2) = 2(\tan + \tan^3)$, $\tan''(0) = 0$
$\tan''' = 2(\tan' + 3\tan^2\tan') = 2\tan'(1+3\tan^2) = 2(1+\tan^2)(1+3\tan^2)$, $\tan'''(0) = 2$
$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

□

3 Opérations sur les DL

3.a Somme et multiplication par un réel

Proposition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
On suppose que f et g admettent des DL d'ordre n en a :
$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} P(h) + o(h^n)$ et $g(a+h) \underset{h\to 0}{=} Q(h) + o(h^n)$
Alors $f + g$ admet en a le DL d'ordre n suivant :
Alors $f(a+h) + g(a+h) \underset{h\to 0}{=} P(h) + Q(h) + o(h^n)$

Proposition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
On suppose que f admet un DL d'ordre n en a :
$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} P(h) + o(h^n)$
Alors λf admet en a le DL d'ordre n suivant :
Alors $\lambda f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \lambda P(h) + o(h^n)$

3.b Produit

Proposition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
On suppose que f et g admettent des DL en a d'ordre n :
$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} P(h) + o(h^n)$ et $g(a+h) \underset{h\to 0}{=} Q(h) + o(h^n)$
Alors $f \times g$ admet en a le DL d'ordre n suivant :
$f(a+h)g(a+h) \underset{h\to 0}{=} T(h) + o(h^n)$ où T est la troncature de $P \times Q$ à l'ordre n.

3.c Puissances

3.d Changement de variable $x = a + h$

3.e Inverse

3.f Quotient

3.g Composée

3.h DL d'un quotient en un point d'annulation du dénominateur

3.i DL de $h \mapsto h^p f(a+h)$ et optimisations

4 Applications des DL

4.a Equivalents

4.b Limites

4.c Position locale de la courbe d'une fonction par rapport à une tangente

4.d Position locale de la courbe d'une fonction par rapport à une asymptote