

Résumé du chapitre 30: espaces vectoriels

Table des matières

1	Espace vectoriel (ev)	1
1.a	Définition	1
1.b	Exemples	1
1.c	Propriétés algébriques	1
2	Familles finies de vecteurs	1
3	Sous-espace vectoriel (sev)	1
3.a	Définition	1
3.b	Sev engendré par une famille finie de vecteurs	1
3.c	Opérations sur les sev	2
4	Familles libres, familles génératrices et bases	3
4.a	Famille libre	3
4.b	Famille génératrice	3
4.c	Base	4
5	Sevs engendrant l'ev, sevs en somme directe, sevs supplémentaires	4
5.a	Sevs engendrant l'ev	4
5.b	Sevs en somme directe	5
5.c	Sevs supplémentaires	5

1 Espace vectoriel (ev)

1.a Définition

1.b Exemples

1.c Propriétés algébriques

2 Familles finies de vecteurs

3 Sous-espace vectoriel (sev)

3.a Définition

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev.

On appelle sev de E tout ensemble F tel que :

- $F \subset E$
- $\forall (x, y) \in F^2, x + y \in F$ (F est stable pour la somme)
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in F, \lambda \cdot x \in F$ (F est stable pour la multiplication par un scalaire)
- $\forall x \in F, -x \in F$ (F est stable par passage à l'opposé)
- $0_E \in F$

Dans ce cas, F muni des loi induites par $+$ et $\cdot$ est un $\mathbb{K}$ -ev.

Proposition (Raccourci pour montrer que F est un sev de E).

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et F un ensemble. On suppose que :

- $F \subset E$
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in F^2, \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F$
(F est stable par combinaison linéaire de deux vecteurs)
- $0_E \in F$

Alors F est un sev de E

3.b Sev engendré par une famille finie de vecteurs

Définition-Propriété.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev. Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E .

On note $Vect(x_1, \dots, x_n)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $x_1, \dots, x_n$.

$$(Vect(x_1, \dots, x_n) = \{ \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot x_k \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \})$$

$Vect(x_1, \dots, x_n)$ est un sev de E .

On dit que $Vect(x_1, \dots, x_n)$ est le sev de E engendré par les vecteurs $x_1, \dots, x_n$.

Démonstration.

- $Vect(x_1, \dots, x_n) \subset E$
 - Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Soit $(x, y) \in Vect(x_1, \dots, x_n)^2$. Montrons que $\lambda \cdot x + \mu \cdot y \in Vect(x_1, \dots, x_n)$.
 $x \in Vect(x_1, \dots, x_n)$ donc il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot x_k$
 $y \in Vect(x_1, \dots, x_n)$ donc il existe $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $y = \sum_{k=1}^n \mu_k \cdot x_k$
 $\lambda \cdot x + \mu \cdot y = \lambda \cdot (\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot x_k) + \mu \cdot (\sum_{k=1}^n \mu_k \cdot x_k) = \sum_{k=1}^n (\lambda \cdot (\lambda_k \cdot x_k) + \mu \cdot (\mu_k \cdot x_k)) = \sum_{k=1}^n (\lambda \lambda_k + \mu \mu_k) \cdot x_k$
 Pour tout $k \in [[1, n]]$, posons $\alpha_k = \lambda \lambda_k + \mu \mu_k$
 $\lambda \cdot x + \mu \cdot y = \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot x_k$ donc $\lambda \cdot x + \mu \cdot y \in Vect(x_1, \dots, x_n)$.
 - Montrons que $0_E \in Vect(x_1, \dots, x_n)$.
 Pour tout $k \in [[1, n]]$, posons $\lambda_k = 0$. $0_E = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot x_k$. Donc $0_E \in Vect(x_1, \dots, x_n)$
- Donc $Vect(x_1, \dots, x_n)$ est un sev de E . □

Proposition.

Le sev engendré par une famille finie de vecteurs est invariant opération élémentaire.

3.c Opérations sur les sev

Proposition.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev. Soit F et G des sev de E . Alors $F \cap G$ est un sev de E .

Définition-Propriété.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev. Soit F et G des sev de E .
On pose $F + G = \{x_1 + x_2 \mid (x_1, x_2) \in F \times G\}$.
 $F + G$ est un sev de E .
On dit que $F + G$ est la somme de F et G .

Démonstration.

- $F + G \subset E$
- Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Soit $(x, y) \in (F + G)^2$. Montrons que $\lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F + G$.
 $x \in F + G$ donc il existe $(x_1, x_2) \in F \times G$ tel que $x = x_1 + x_2$.
 $y \in F + G$ donc il existe $(y_1, y_2) \in F \times G$ tel que $y = y_1 + y_2$.
 $\lambda \cdot x + \mu \cdot y = \lambda \cdot (x_1 + x_2) + \mu \cdot (y_1 + y_2) = (\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot y_1) + (\lambda \cdot x_2 + \mu \cdot y_2)$
 $\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot y_1 \in F$ car $(x_1, y_1) \in F^2$ et F est un sev de E
 $\lambda \cdot x_2 + \mu \cdot y_2 \in G$ car $(x_2, y_2) \in G^2$ et G est un sev de E
Posons $z_1 = \lambda \cdot x_1 + \mu \cdot y_1$ et $z_2 = \lambda \cdot x_2 + \mu \cdot y_2$.
 $\lambda \cdot x + \mu \cdot y = z_1 + z_2$ et $(z_1, z_2) \in F \times G$ donc $\lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F + G$.
- Montrons que $0_E \in F + G$
 $0_E = 0_E + 0_E$. $0_E \in F$ car F sev de E . $0_E \in G$ car G sev de E .
En prenant $x_1 = 0_E$ et $x_2 = 0_E$, on obtient $0_E = x_1 + x_2$ et $(x_1, x_2) \in F \times G$. Donc $0_E \in F + G$.
Donc $F + G$ est un sev de E .

□

4 Familles libres, familles génératrices et bases

4.a Famille libre

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev. Soit $\mathcal{F} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E .
On dit que $\mathcal{F}$ est libre (ou que les vecteurs $x_1, \dots, x_n$ sont linéairement indépendants) ssi :
 $\forall (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \dots + \lambda_n \cdot x_n = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$
On dit que $\mathcal{F}$ est liée (ou que les vecteurs $x_1, \dots, x_n$ sont linéairement dépendants) ssi $\mathcal{F}$ n'est pas libre ssi :
 $\exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \dots + \lambda_n \cdot x_n = 0_E$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ne sont pas tous nuls

Proposition.

Une famille de vecteurs est liée ssi au moins un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Proposition.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev. Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E .
 $\mathcal{F}$ est libre
 $\Leftrightarrow \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \forall (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n,$
 $\lambda_1 \cdot x_1 + \dots + \lambda_n \cdot x_n = \mu_1 \cdot x_1 + \dots + \mu_n \cdot x_n \Rightarrow (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\mu_1, \dots, \mu_n)$
(lorsqu'un vecteur s'écrit sous la forme d'une combinaison linéaires des vecteurs $x_1, \dots, x_n$, les scalaires sont uniques)

Démonstration. Montrons " $\Leftarrow$ ". Supposons $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \forall (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n, \lambda_1 \cdot x_1 + \dots + \lambda_n \cdot x_n = \mu_1 \cdot x_1 + \dots + \mu_n \cdot x_n \Rightarrow (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\mu_1, \dots, \mu_n)$. Montrons que $\mathcal{F}$ est libre. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.

On suppose que $\lambda_1 \cdot x_1 + \dots + \lambda_n \cdot x_n = 0_E$. $\lambda_1 \cdot x_1 + \dots + \lambda_n \cdot x_n = 0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n$ donc par unicité $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$. Donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Donc $\mathcal{F}$ est libre. Nous avons montré " $\Leftarrow$ ".

Montrons " $\Rightarrow$ ". Supposons que $\mathcal{F}$ est libre. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$. On suppose $\lambda_1 \cdot x_1 + \dots + \lambda_n \cdot x_n = \mu_1 \cdot x_1 + \dots + \mu_n \cdot x_n$. Alors $(\lambda_1 - \mu_1) \cdot x_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n) \cdot x_n = 0_E$. Or $\mathcal{F}$ est libre. Donc $\lambda_1 - \mu_1 = \dots = \lambda_n - \mu_n = 0$. Donc $\lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_n = \mu_n$. Donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\mu_1, \dots, \mu_n)$. Nous avons montré " $\Rightarrow$ ".

Par double implication, nous avons montré l'équivalence. □

Proposition.

Toute sur-famille d'une famille liée est liée.
Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

4.b Famille génératrice

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev. Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E .
On dit que la famille $\mathcal{F}$ est génératrice de E (ou que les vecteurs $x_1, \dots, x_n$ engendrent E) ssi :
 $\forall x \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \dots + \lambda_n \cdot x_n$
(tout vecteur de E s'écrit sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs $x_1, \dots, x_n$)

Proposition.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev. Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E .
 $\mathcal{F}$ est génératrice de $E \Leftrightarrow E = Vect(x_1, \dots, x_n)$

Proposition.

Toute sur-famille d'une famille génératrice d'un ev est génératrice de cet ev.

4.c Base

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev. Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E .
On dit que $\mathcal{F}$ est une base de E ssi :
 $\forall x \in E, \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \lambda_1 \cdot x_1 + \dots + \lambda_n \cdot x_n$
(tout vecteur de E s'écrit de manière unique sous la forme d'une combinaison linéaire de $x_1, \dots, x_n$)
Dans ce cas, les coordonnées d'un vecteur $x \in E$ dans la base $\mathcal{F}$ sont les uniques scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $x = \lambda_1 \cdot x_1 + \dots + \lambda_n \cdot x_n$.

Proposition.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev. Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E .
 $\mathcal{F}$ est une base de $E \Leftrightarrow \mathcal{F}$ est libre et génératrice de E

5 Sevs engendrant l'ev, sevs en somme directe, sevs supplémentaires

5.a Sevs engendrant l'ev

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev. Soit F et G des sev de E .

On dit que F et G engendrent E ssi :

$$\forall x \in E, \exists (x_1, x_2) \in F \times G, x = x_1 + x_2$$

(tout élément de E s'écrit sous la forme d'une somme d'un élément de F et d'un élément de G)

Proposition.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev. Soit F et G des sev de E .

$$F \text{ et } G \text{ engendrent } E \Leftrightarrow E = F + G$$

5.b Sevs en somme directe

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev. Soit F et G des sev de E .

On dit que F et G sont en somme directe et on note $F + G = F \oplus G$ ssi :

$$\forall (x_1, x_2) \in F \times G, \forall (y_1, y_2) \in F \times G, x_1 + x_2 = y_1 + y_2 \Rightarrow (x_1, x_2) = (y_1, y_2)$$

(lorsqu'un vecteur s'écrit sous la forme d'une somme d'un élément de F et d'un élément de G cette écriture est unique)

Proposition.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev. Soit F et G des sev de E .

$$F \text{ et } G \text{ sont en somme directe} \Leftrightarrow F \cap G = \{0_E\}$$

Démonstration. Montrons " $\Rightarrow$ ". Supposons F et G en somme directe. L'inclusion $\{0_E\} \subset F \cap G$ est évidemment toujours vérifiée. Montrons que $F \cap G \subset \{0_E\}$. Soit $x \in F \cap G$. $x + 0_E = 0_E + x$ et $(x, 0_E) \in F \times G$ et $(0_E, x) \in F \times G$ donc par unicité $(x, 0_E) = (0_E, x)$ donc $x = 0_E$. Donc $F \cap G \subset \{0_E\}$. Par double-inclusion, $F \cap G = \{0_E\}$. Nous avons montré " $\Rightarrow$ ".

Montrons " $\Leftarrow$ ". Supposons $F \cap G = \{0_E\}$. Soit $(x_1, x_2) \in F \times G$ et $(y_1, y_2) \in F \times G$. On suppose $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$. $x_1 - y_1 = y_2 - x_2$. $x_1 - y_1 \in F$ car $x_1 \in F$, $y_1 \in F$ et F sev de E . $y_2 - x_2 \in G$ car $x_2 \in G$, $y_2 \in G$ et G sev de E . $x_1 - y_1 = y_2 - x_2 \in F \cap G$ et $F \cap G = \{0_E\}$ donc $x_1 - y_1 = y_2 - x_2 = 0_E$ donc $x_1 = y_1$ et $x_2 = y_2$ donc $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$. Donc F et G sont en somme directe. Nous avons montré " $\Leftarrow$ ".

Par double implication, nous avons montré l'équivalence. □

5.c Sevs supplémentaires

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev. Soit F et G des sev de E .

On dit que F et G sont supplémentaires dans E et on note $E = F \oplus G$ ssi :

$$\forall x \in E, \exists! (x_1, x_2) \in F \times G, x = x_1 + x_2$$

(tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G)

Proposition.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev. Soit F et G des sev de E .
 $E = F \oplus G \Leftrightarrow E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$.