Résumé du chapitre 32: espaces vectoriels de dimension finie

Table des matières

1 Définition

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev.
On dit que E est de dimension finie ssi E admet au moins une famille génératrice (finie).

2 Algorithme d'obtention d'une base

Proposition (augmentation d'une famille libre)**.**

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $x_1, ..., x_n, x$ des vecteurs de E. Supposons que $(x_1, ..., x_n)$ libre et x n'est pas cl de $x_1, ..., x_n$. Alors $(x_1, ..., x_n, x)$ est libre.

Proposition (réduction d'une famille génératrice ou d'un Vect)**.**

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $x_1, ..., x_n, x$ des vecteurs de E. Supposons $(x_1, ..., x_n, x)$ génératrice de E (i.e $E = Vect(x_1, ..., x_n, x)$) et x cl de x_1,...,x_n. Alors $(x_1, ..., x_n)$ est génératrice de E (i.e $E = Vect(x_1, ..., x_n)$).

Théorème (de la base extraite)**.**

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
De toute famille génératrice de E on peut extraire une base de E.

Corollaire.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. E admet au moins une base.

Théorème (de la base incomplète)**.**

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
Toute famille libre peut être complétée en une base de E
(en utilisant des vecteurs d'une famille génératrice de E).

3 Dimension

3.a Définition

Théorème (de la dimension)**.**

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Toutes les bases de E ont le même cardinal.

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. On appelle dimension de E et on note $dim(E)$ le cardinal commun à toutes les bases de E.

3.b Exemples

Proposition.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ...0)$, ..., $e_n = (0, ..., 0, 1)$.
$\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$, appelée la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
Les coordonnées d'un n-uplet $x \in \mathbb{K}^n$ dans la base $\mathcal{B}$ sont les composantes de x.
$\mathbb{K}^n$ est de dimension finie et $dim(\mathbb{K}^n) = n$.

Proposition.

Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Pour tout $(i, j) \in [[1, n]] \times [[1, p]]$, on note $E_{i,j}$ la matrice de taille (n, p) dont tous les coefficients sont nuls, sauf le coefficient d'indice (i, j) qui vaut 1.
$\mathcal{B} = (E_{i,j})_{(i,j)\in[[1,n]]\times[[1,p]]}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, appelée la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Les coordonnées d'une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dans la base $\mathcal{B}$ sont les coefficients de M.
$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension finie et $dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = n \times p$

Proposition.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère $\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] | deg(P) \leq n\}$.
$\mathcal{B} = (1, X, ..., X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, appelée la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.
Les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans la base $\mathcal{B}$ sont les coefficients de P.
$\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension finie et $dim(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$.

4 Familles libres, familles génératrices et bases

Proposition.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dim finie. Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E.
Si $\mathcal{F}$ est libre alors $Card(\mathcal{F}) \leq dim(E)$.
Si $\mathcal{F}$ est génératrice de E alors $Card(\mathcal{F}) \geq dim(E)$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\mathcal{F}$ est une base de E.

ii) $\mathcal{F}$ est libre et $Card(\mathcal{F}) = dim(E)$

iii) $\mathcal{F}$ est génératrice de E et $Card(\mathcal{F}) = dim(E)$

5 Sous-espace vectoriel (sev)

Proposition.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Soit F un sev de E.
F est de dimension finie. $dim(F) \leq dim(E)$. $dim(F) = dim(E) \Rightarrow F = E$.

Corollaire.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit F et G des sev de E. On suppose F et G de dimension finie.
$F = G \Leftrightarrow F \subset G$ et $dim(F) = dim(G)$

6 Rang d'une famille finie de vecteurs

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit $\mathcal{F} = (x_1, ..., x_n)$ une famille finie de vecteurs de E.
On appelle rang de $\mathcal{F}$ l'entier $rg(\mathcal{F}) = dim(Vect(x_1, ..., x_n))$.

Proposition.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs de E.
$rg(\mathcal{F}) \leq Card(\mathcal{F})$ et $rg(\mathcal{F}) = Card(\mathcal{F}) \Leftrightarrow \mathcal{F}$ est libre

Proposition.

Le rang d'une famille finie de vecteurs est invariant par opération élémentaire.

7 Sevs engendrant l'ev, sevs en somme directe, sevs supplémentaires

Proposition.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit F et G des sev de E.
Soit $(f_1, ..., f_n)$ une base de F et $(g_1, ..., g_m)$ une base de G.
$F \cap G = \{0_E\} \Leftrightarrow (f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_m)$ est libre
$(f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_m)$ est génératrice de $F + G$
$F + G = E \Leftrightarrow (f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_m)$ est génératrice de E
$E = F \oplus G \Leftrightarrow (f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_m)$ est une base de E. Dans ce cas, on dit que $(f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_m)$ est une base de E adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$.

Proposition.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit F et G des sev de E.
On suppose que F et G sont de dimension finie et $E = F \oplus G$.
Alors E est de dimension finie et $dim(E) = dim(F) + dim(G)$.

Démonstration. F est de dimension finie donc admet un moins une base $\mathcal{F} = (f_1, ..f_n)$. G est de dimension finie donc admet au moins une base $\mathcal{G} = (g_1, ..., g_m)$. $\mathcal{H} = (f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_m)$ est une base de E (dite adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$). Donc E est de dimension finie et $dim(E) = Card(\mathcal{H}) = n + m = Card(\mathcal{F}) + Card(\mathcal{G}) = dim(F) + dim(G)$. □

Proposition.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Soit F et G des sev de E.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $E = F \oplus G$
ii) $F \cap G = \{0_E\}$ et $dim(F) + dim(G) = dim(E)$
iii) $F + G = E$ et $dim(F) + dim(G) = dim(E)$

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit F un sev de E.
On appelle sev supplémentaire de F dans E tout sev G de E tel que $F \oplus G = E$.

Proposition.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Soit F un sev de E.
Alors F admet au moins un supplémentaire G dans E. $dim(G) = dim(E) - dim(F)$.

Démonstration. Choisissons $\mathcal{F} = (e_1, ..., e_p)$ une base de F. $\mathcal{F}$ est une famille de vecteurs de F libre et $\mathcal{F}$ est génératrice de F i.e. $F = Vect(e_1, ..., e_p)$. $\mathcal{F}$ est une famille de vecteurs de E libre donc, d'après le théorème de la base incomplète, $\mathcal{F}$ peut être complétée en une base de E $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p, e_{p+1}, ..., e_n)$. Posons $G = Vect(e_{p+1}, ..., e_n)$. Alors $E = F \oplus G$. G est un supplémentaire de F dans E. $dim(E) = dim(F) + dim(G)$ donc $dim(G) = dim(E) - dim(F)$. □

Proposition (formule de Grassmann)**.**

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit F et G des sev de E. On suppose F et G de dimension finie. Alors $F + G$ est de dimension finie et $dim(F + G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G)$.