Résumé du chapitre 35: représentation matricielle

Table des matières

1	Représentation matricielle d'un vecteur, d'une famille, d'une application	1
1.a	Vecteur	1
1.b	Famille de vecteurs	1
1.c	Application linéaire	1
2	Le produit matriciel représente l'évaluation et la composition	2
2.a	Evaluation	2
2.b	Composition	2
3	Les matrices inversibles représentent bases, isomorphismes, automorphismes	3
3.a	Bases	3
3.b	Isomorphismes et automorphismes	3
4	Algèbre linéaire canoniquement associée aux matrices	3
5	Matrices de passage et formules de changement de base	3
5.a	Matrices de passage	3
5.b	Formules de changement de base	3

1 Représentation matricielle d'un vecteur, d'une famille, d'une application

1.a Vecteur

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie n . Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit x un vecteur de E . On appelle matrice de x dans la base $\mathcal{B}$ et on note $Mat_{\mathcal{B}}(x)$ la matrice colonne de taille $(n, 1)$ formée des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

Proposition.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie n . Soit $\mathcal{B}$ une base de E .
L'application $\begin{cases} E & \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x & \mapsto Mat_{\mathcal{B}}(x) \end{cases}$ est un isomorphisme.

1.b Famille de vecteurs

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie n . Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E . On appelle matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ et on note $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ la matrice de taille (n, p) telle que pour tout $j \in [[1, p]]$, la j -ième colonne est formée des coordonnées de x_j dans la base $\mathcal{B}$.

1.c Application linéaire

Définition.

Soit E et F des $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie p et n . Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ des bases de E et F . Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. On appelle matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et on note $Mat_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ la matrice de taille (n, p) telle que pour tout $j \in [[1, p]]$, la j -ième colonne est formée des coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$.

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie n et $\mathcal{B}$ une base de E . Soit f un endomorphisme de E . On appelle matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ et on note $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice carrée de taille n $Mat_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)$.

Proposition.

Soit E et F des $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie p et n . Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases de E et F .

L'application $\begin{cases} \mathcal{L}(E, F) & \rightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & Mat_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \end{cases}$ est un isomorphisme.

$\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et $dim(\mathcal{L}(E, F)) = dim(E) \times dim(F)$

Corollaire.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie n . Soit $\mathcal{B}$ une base de E .

L'application $\begin{cases} \mathcal{L}(E) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & Mat_{\mathcal{B}}(f) \end{cases}$ est un isomorphisme.

$\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie et $dim(\mathcal{L}(E)) = dim(E)^2$

2 Le produit matriciel représente l'évaluation et la composition

2.a Evaluation

Proposition.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $x \in E$. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases de E et F .

$Mat_{\mathcal{C}}(f(x)) = Mat_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \times Mat_{\mathcal{B}}(x)$.

Corollaire.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E . $Mat_{\mathcal{B}}(f(x)) = Mat_{\mathcal{B}}(f) \times Mat_{\mathcal{B}}(x)$

2.b Composition

Proposition.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Soit $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ des bases de E, F, G .
 $Mat_{\mathcal{B}, \mathcal{D}}(g \circ f) = Mat_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(g) \times Mat_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$.

Corollaire.

Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E . $Mat_{\mathcal{B}}(g \circ f) = Mat_{\mathcal{B}}(g) \times Mat_{\mathcal{B}}(f)$.

Proposition.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie n . Soit $\mathcal{B}$ une base de E . $Mat_{\mathcal{B}}(Id_E) = I_n$.

3 Les matrices inversibles représentent bases, isomorphismes, automorphismes

3.a Bases

Proposition.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev. Soit $\mathcal{B}$ une base de E . Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E .
 $\mathcal{F}$ est une base de $E \Leftrightarrow Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est carrée inversible

3.b Isomorphismes et automorphismes

Proposition.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases de E et F .
 f est bijective $\Leftrightarrow Mat_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ est carrée inversible
Dans ce cas, $Mat_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f^{-1}) = Mat_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)^{-1}$.

Corollaire.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E .
 f est bijectif $\Leftrightarrow Mat_{\mathcal{B}}(f)$ est inversible
Dans ce cas, $Mat_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = Mat_{\mathcal{B}}(f)^{-1}$.

4 Algèbre linéaire canoniquement associée aux matrices

5 Matrices de passage et formules de changement de base

5.a Matrices de passage

Définition.

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E . On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et on note $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice inversible $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.

Proposition.

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E . $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

5.b Formules de changement de base

Proposition (Formule de changement de base pour un vecteur).

Soit $x \in E$. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ des bases de E .
On pose $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, $X = Mat_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = Mat_{\mathcal{B}'}(x)$. Alors $X' = P^{-1}X$.

Proposition (Formule de changement de base pour une application linéaire).

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ des bases de E . Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ des bases de F .
On pose $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, $Q = P_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$, $A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ et $B = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)$. Alors $B = Q^{-1}AP$.

Corollaire (Formule de changement de base pour un endomorphisme).

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ des bases de E .
On pose $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$ et $B = Mat_{\mathcal{B}'}(f)$. Alors $B = P^{-1}AP$.