Résumé du chapitre 36: projections et symétries

Table des matières

1 Définition

Définition-Propriété.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit F et G des sev de E supplémentaires dans E.
On appelle projection sur F parallèlement à G l'application $p : E \to E$ définie par $p(x) = x_1$ considérant l'unique couple $(x_1, x_2) \in F \times G$ tel que $x = x_1 + x_2$.
On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G l'application $s : E \to E$ définie par $s(x) = x_1 - x_2$ considérant l'unique couple $(x_1, x_2) \in F \times G$ tel que $x = x_1 + x_2$.
p et s sont des endomorphismes de E.

Démonstration. Montrons p et s linéaires. Soit $(x, y) \in E^2$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.
Montrons que $p(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot p(x) + \mu \cdot p(y)$
et $s(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot s(x) + \mu \cdot s(y)$.
Il existe un unique $(x_1, x_2) \in F \times G$ tel que $x = x_1 + x_2$. $p(x) = x_1$ et $s(x) = x_1 - x_2$.
Il existe un unique $(y_1, y_2) \in F \times G$ tel que $y = y_1 + y_2$. $p(y) = y_1$ et $s(y) = y_1 - y_2$.
$\lambda \cdot x + \mu \cdot y = \lambda \cdot (x_1 + x_2) + \mu \cdot (y_1 + y_2)$.
$\lambda \cdot x + \mu \cdot y = (\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot y_1) + (\lambda \cdot x_2 + \mu \cdot y_2)$
et $\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot y_1 \in F$ (car $(x_1, y_1) \in F^2$ et F est un sev de E)
et $\lambda \cdot x_2 + \mu \cdot y_2 \in G$ (car $(x_2, y_2) \in G^2$ et G est un sev de E)
donc $p(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot x_1 + \mu \cdot y_1$ et $s(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = (\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot y_1) - (\lambda \cdot x_2 + \mu \cdot y_2)$.
Donc $p(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot p(x) + \mu \cdot p(y)$ et $s(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot (x_1 - x_2) + \mu \cdot (y_1 - y_2) = \lambda \cdot s(x) + \mu \cdot s(y)$.
Donc p et s sont linéaires. Or $p : E \to E$ et $s : E \to E$.
Donc p et s sont des endomorphismes de E.

□

2 Propriétés

Proposition.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit F et G des sev de E supplémentaires dans E.
On considère $p : E \to E$ la projection sur F parallèlement à G.

- L'ensemble des vecteurs invariants par p est $Ker(p - Id_E) = F$.
- $Ker(p) = G$
- $p^2 = p$
- $Im(p) = F$

Proposition.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit F et G des sev de E supplémentaires dans E.
On considère $s : E \to E$ la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

- L'ensemble des vecteurs invariants par s est $Ker(s - Id_E) = F$.
- L'ensemble des vecteurs transformés en leur opposé par s est $Ker(s + Id_E) = G$.
- $s^2 = Id_E$ (involution). Donc s est un automorphisme et $s^{-1} = s$.

3 Caractérisation

Proposition.

Soit $f : E \to E$ un endomorphisme. On suppose $f^2 = f$. Alors f est une projection.

Proposition.

Soit $f : E \to E$ un endomorphisme. On suppose $f^2 = Id_E$. Alors f est une symétrie.

4 Relation entre projections et symétries