Résumé du chapitre 40: espaces probabilisés finis

Table des matières

1 Epreuve aléatoire et univers

Définition.

On appelle univers l'ensemble Ω des résultats possibles d'une épreuve aléatoire.

2 Evènements

2.a Définition

Définition.

On appelle évènement toute partie A de Ω. L'ensemble des évènements est donc $\mathcal{P}(\Omega)$.
On appelle évènement impossible l'évenement $\emptyset$.
On appelle évènement certain l'évènement Ω.
On appelle évènement élémentaire tout singleton $\{\omega\}$ où $\omega \in \Omega$.

2.b Opérations

Définition.

Soit A un évènement.
On appelle évènement contraire de A l'évènement $\overline{A} = \complement_\Omega A$.
Soit A et B deux évènements.
On appelle évènement "A ou B" l'évènement $A \cup B$.
On appelle évènement "A et B" l'évènement $A \cap B$.
A et B sont dits incompatibles ssi A et B sont disjoints i.e. $A \cap B = \emptyset$.

2.c Système complet

Définition.

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie d'évènements.
On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'évènements ssi $(A_i)_{i \in I}$ est une partition de Ω i.e. $\forall \omega \in \Omega, \exists ! i \in I, \omega \in A_i$ (quel que soit le résultat de l'épreuve aléatoire, un et un seul des évènements A_i, $i \in I$ va se produire).

Proposition.

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie d'évenements.
$(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'évènements
$\Leftrightarrow \bigcup\limits_{i \in I} A_i = \Omega$ et les évènements A_i,$i \in I$ sont deux à deux incompatibles
(i.e. $\forall (i,j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$)

3 Mesure de probabilité

3.a Définition

Définition.

On appelle mesure de probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$ toute application $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ telle que :

- $P(\emptyset) = 0$
- Si A et B sont deux évènements incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- $P(\Omega) = 1$

3.b Une mesure de probabilité est uniquement déterminée par les probabilités des évènements élémentaires.

Proposition.

Soit P une mesure de probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$.
Pour tout évènement A, $P(A) = \sum\limits_{\omega \in A} P(\{\omega\})$. $\sum\limits_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = 1$.

Proposition.

Soit $(u_\omega)_{\omega\in\Omega}$ une famille de réels positifs tels que $\sum\limits_{\omega\in\Omega} u_\omega = 1$. Alors il existe une unique mesure de probabilité P sur $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que pour tout $\omega \in \Omega$, $P(\{\omega\}) = u_\omega$.

Proposition.

Il existe une unique mesure de probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$ pour laquelle les évènements élémentaires sont équiprobables. Pour cette mesure, la probabilité commune aux évènements élémentaires est $\frac{1}{Card(\Omega)}$ et la probabilité d'un évènement A est $\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$ (quotient du nombre de résultats favorables à A divisé par le nombre de résultats possibles).

3.c Propriétés

Proposition.

Soit A un évènement. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Démonstration. $\Omega = A \cup \overline{A}$ et A et $\overline{A}$ sont incompatibles (i.e. $A \cap \overline{A} = \emptyset$) donc $P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$. Or $P(\Omega) = 1$. Donc $P(A) + P(\overline{A}) = 1$. Donc $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

□

Proposition.

Soit A et B des évènements tels que $A \subset B$. Alors $P(A) \leq P(B)$. (croissance)
De plus $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

Proposition.

Soit A et B des évènements. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Proposition.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille finie d'évènements. On suppose les évènements A_i,$i \in I$ deux à deux incompatibles (i.e. $\forall (i,j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$). Alors $P(\bigcup\limits_{i\in I} A_i) = \sum\limits_{i\in I} P(A_i)$.

Proposition.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'évènements. Alors $\sum\limits_{i\in I} P(A_i) = 1$.

Démonstration. $\Omega = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ et les $A_i, i \in I$ sont deux à deux incompatibes donc

$$P(\Omega) = P(\bigcup_{i\in I} A_i) = \sum_{i\in I} P(A_i). \text{ Or } P(\Omega) = 1. \text{ Donc } \sum_{i\in I} P(A_i) = 1.$$

□

4 Probabilités conditionnelles

Définition-Propriété.

Soit A et B deux évènements. On suppose $P(B) > 0$.
On appelle probabilité de A sachant B le quotient $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.
Ainsi $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$.

Proposition.

Soit B un évènement. On suppose $P(B) > 0$. L'application $P_B : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ définie par $P_B(A) = P(A|B)$ est une mesure de probabilité.

5 Formules

5.a Formule des probabilités totales

Proposition.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'évènements. On suppose pour tout $i \in I$, $P(A_i) > 0$.
Soit B évènement. $P(B) = \sum\limits_{i\in I} P(B\cap A_i) = \sum\limits_{i\in I} P(B|A_i)P(A_i)$ (formule des proba totales).

Démonstration. $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'évènements donc $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \Omega$ et les A_i,$i \in I$ sont deux à deux incompatibles. $\bigcup\limits_{i\in I}(B\cap A_i) = B\cap(\bigcup\limits_{i\in I} A_i) = B\cap\Omega = B$ (car $B \subset \Omega$) et les $B\cap A_i$, $i \in I$ sont deux à deux incompatibles (car pour tout $(i, j) \in I^2$ tel que $i \neq j$, $(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = (B \cap B)\cap(A_i\cap A_j) = B\cap\emptyset = \emptyset$). Donc $P(B) = P(\bigcup\limits_{i\in I}(B\cap A_i)) = \sum\limits_{i\in I} P(B\cap A_i) = \sum\limits_{i\in I} P(B|A_i)P(A_i)$. □

Proposition.

Soit A un évènement. A et $\overline{A}$ forment un système complet d'évènements.
En particulier, d'après la formule des probabilités totales,
en supposant $P(A) > 0$ et $P(\overline{A}) > 0$, pour tout évènement B,
$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) = P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})$.

Démonstration. $\Omega = A \cup \overline{A}$ et A et $\overline{A}$ sont incompatibles i.e. $A \cap \overline{A} = \emptyset$. Donc A et $\overline{A}$ forment un système complet d'évènements. □

5.b Formule de Bayes

Proposition.

Soit A et B deux évènements. On suppose $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$.
Alors $P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$ (formule de Bayes).

Démonstration. $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B\cap A)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$

□

5.c Formule des probabilités composées

Proposition.

Soit $A_1, ..., A_n$ des évènements. On suppose $P(A_{n-1} \cap ... \cap A_1) > 0$.
$P(A_n \cap A_{n-1} ... \cap A_1) = P(A_n | A_{n-1} \cap ... \cap A_1) P(A_{n-1} | A_{n-2} \cap ... \cap A_1) .... P(A_2 | A_1) P(A_1)$
(formule des probabilités composées)

Démonstration. $P(A_n \cap A_{n-1} ... \cap A_1)$
$= P(A_n | A_{n-1} \cap ... \cap A_1) P(A_{n-1} \cap ... \cap A_1)$
$= P(A_n | A_{n-1} \cap ... \cap A_1) P(A_{n-1} | A_{n-2} \cap ... \cap A_1) P(A_{n-2} \cap ... \cap A_1)$
.....
$= P(A_n | A_{n-1} \cap ... \cap A_1) P(A_{n-1} | A_{n-2} \cap ... \cap A_1) .... P(A_2 | A_1) P(A_1)$

$\square$

6 Evènements indépendants

Définition.

Deux évènements A et B sont dits indépendants ssi $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Proposition.

Soit A et B deux évènements. On suppose $P(B) > 0$.
A et B sont indépendants $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$.

Définition.

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie d'évènements.
On dit que les évènements A_i, $i \in I$ sont mutuellement indépendants ssi pour tout ensemble d'indices J inclus dans I, $P(\bigcap_{i \in J} A_i) = \prod_{i \in J} P(A_i)$