

Résumé du chapitre 41: variables aléatoires (va)

Table des matières

1	Définition	1
2	Support d'une va, évènements ne dépendant que de la valeur prise par une va, loi de probabilité d'une va	1
2.a	Support d'une va	1
2.b	Evènements ne dépendant que de la valeur prise par une va	1
2.c	Loi de probabilité d'une va	2
3	Va usuelles	2
4	Couple de va	3
5	Va indépendantes	4
6	Espérance	4
6.a	Définition et théorème de transfert	4
6.b	Exemples usuels	5
6.c	Propriétés	5
7	Variance	6
7.a	Définition et théorème de König-Huygens	6
7.b	Exemples usuels	6
7.c	Propriétés	7
8	Covariance	7
8.a	Définition	7
8.b	Propriétés	7

1 Définition

Définition.

On appelle va toute application $X : \Omega \rightarrow E$ où E est un ensemble.
Si $E = \mathbb{R}$, on dit que la va est réelle.

2 Support d'une va, évènements ne dépendant que de la valeur prise par une va, loi de probabilité d'une va

2.a Support d'une va

Définition.

Soit $X : \Omega \rightarrow E$ une va. On appelle support de X l'ensemble $X(\Omega) = \{X(\omega) | \omega \in \Omega\}$ ($X(\Omega)$ est l'ensemble des valeurs que peut prendre X). $X(\Omega) \subset E$.

2.b Evènements ne dépendant que de la valeur prise par une va

Définition.

Soit $X : \Omega \rightarrow E$ une va.

Soit A une partie de E . On note $(X \in A)$ l'évènement $\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in A\}$ (évènement "la valeur prise par X appartient à A ").

Soit $x \in E$. On note $(X = x)$ l'évènement $\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\}$ (évènement "la valeur prise par X est égale à x ").

Proposition.

Soit $X : \Omega \rightarrow E$ une va.

$(X \in \emptyset) = \emptyset$. $(X \in X(\Omega)) = \Omega$.

Soit A une partie de E . $(X \in \overline{A}) = (X \in \overline{A})$.

Soit A et B deux parties de E .

$(X \in A) \cup (X \in B) = (X \in A \cup B)$. $(X \in A) \cap (X \in B) = (X \in A \cap B)$.

Si A et B sont disjointes alors $(X \in A)$ et $(X \in B)$ sont incompatibles.

2.c Loi de probabilité d'une va

Définition-Propriété.

Soit $X : \Omega \rightarrow E$ une va. L'application $P_X : \mathcal{P}(X(\Omega)) \rightarrow [0, 1]$ définie par $P_X(A) = P(X \in A)$ est une mesure de probabilité. P_X est appelée la loi probabilité de X .

Proposition.

Soit $X : \Omega \rightarrow E$ une va.

$(X = x)_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'évènements. En particulier, $\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1$.

Pour tout $x \in E$, $(X = x) \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in X(\Omega)$.

Pour toute partie finie A de E , $P(X \in A) = \sum_{x \in A} P(X = x)$.

Pour toute partie A de E , $(X \in A) = (X \in A \cap X(\Omega))$.

3 Va usuelles

Définition-Propriété.

Soit $C \in \mathbb{R}$. On dit qu'une va X est certaine de valeur C ssi X est constante de valeur C . Dans ce cas, $X(\Omega) = \{C\}$ et $P(X = C) = 1$.

Définition-Propriété.

Soit F un ensemble fini. On dit qu'une va X suit la loi uniforme sur F et on note $X \sim U(F)$ ssi $X(\Omega) = F$ et les évènements $(X = x)$, $x \in F$ sont équiprobables. Dans ce cas, pour tout $x \in F$, $P(X = x) = \frac{1}{\text{Card}(F)}$ et, pour toute partie A de F , $P(X \in A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(F)}$.

Définition-Propriété.

Soit $p \in]0, 1[$. On effectue une épreuve aléatoire menant à un succès avec la probabilité p . On note X la va prenant pour valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec. $X(\Omega) = \{0, 1\}$. $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$. On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p et on note $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Définition-Propriété.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. On effectue n épreuves aléatoires indépendantes, chacune menant à un succès avec la probabilité p . On note X la va prenant pour valeur le nombre de succès obtenus. $X(\Omega) = [0, n]$. Pour tout $k \in [0, n]$, $P(X = k) = \binom{n}{k} (1 - p)^{n-k} p^k$. On dit que X suit la loi binômiale de paramètres n et p et on note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

4 Couple de va

Définition.

Soit $X : \Omega \rightarrow E$ et $Y : \Omega \rightarrow F$ deux va.

Le couple de va (X, Y) est considéré comme la va $\begin{cases} \Omega & \rightarrow & E \times F \\ \omega & \mapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{cases}$.

La loi conjointe du couple (X, Y) est la loi de la va ci-dessus.

Les lois marginales du couple (X, Y) sont la loi de X et la loi de Y .

Proposition.

Soit $X : \Omega \rightarrow E$ et $Y : \Omega \rightarrow F$ deux va.

$(X, Y)(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$

Pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$, $((X, Y) \in A \times B)$ est l'évènement $(X \in A) \cap (Y \in B)$.

Pour tout $(x, y) \in E \times F$, $((X, Y) = (x, y))$ est l'évènement $(X = x) \cap (Y = y)$.

Proposition.

Soit $X : \Omega \rightarrow E$ et $Y : \Omega \rightarrow F$ deux va.

Pour tout $x \in X(\Omega)$, $P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P((X, Y) = (x, y))$.

Pour tout $y \in Y(\Omega)$, $P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P((X, Y) = (x, y))$.

Les lois marginales sont déterminées par la loi conjointe.

Démonstration.

Soit $x \in X(\Omega)$. $(Y = y)_{y \in Y(\Omega)}$ est un système complet d'évènements donc, d'après la formule des probabilités totales, $P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P((X = x) \cap (Y = y)) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P((X, Y) = (x, y))$.

Soit $y \in Y(\Omega)$. $(X = x)_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'évènements donc, d'après la formule des probabilités totales, $P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P((X = x) \cap (Y = y)) = \sum_{x \in X(\Omega)} P((X, Y) = (x, y))$. □

Proposition.

Soit $X : \Omega \rightarrow E$ et $Y : \Omega \rightarrow F$ deux va.

Pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $P((X, Y) = (x, y)) = P(X = x|Y = y)P(Y = y)$.

La loi conjointe de (X, Y) est déterminée par les lois conditionnelles de X sachant $(Y = y)$, $y \in Y(\Omega)$ et par la loi de Y .

Pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $P((X, Y) = (x, y)) = P(Y = y|X = x)P(X = x)$.

La loi conjointe de (X, Y) est déterminée par les lois conditionnelles de Y sachant $(X = x)$, $x \in X(\Omega)$ et par la loi de X .

Démonstration. Soit $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

$$P((X, Y) = (x, y)) = P((X = x) \cap (Y = y)) = P(X = x|Y = y)P(Y = y).$$

$$P((X, Y) = (x, y)) = P((Y = y) \cap (X = x)) = P(Y = y|X = x)P(X = x).$$
□

5 Va indépendantes

Définition.

Soit $X : \Omega \rightarrow E$ et $Y : \Omega \rightarrow F$ deux va.

On dit que X et Y sont indépendantes ssi pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$ les évènements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants i.e. $P((X, Y) \in A \times B) = P(X \in A)P(Y \in B)$.

Proposition.

Soit $X : \Omega \rightarrow E$ et $Y : \Omega \rightarrow F$ deux va.

X et Y sont indépendantes

$\Leftrightarrow$ pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, les évènements $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont indépendants i.e. $P((X, Y) = (x, y)) = P(X = x)P(Y = y)$

Définition.

Soit $X_1 : \Omega \rightarrow E_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow E_n$ des va. On dit que les va $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes ssi pour tout $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(E_1) \times \dots \times \mathcal{P}(E_n)$, les évènements $(X_1 \in A_1), \dots, (X_n \in A_n)$ sont mutuellement indépendants.

Proposition.

Soit $X_1 : \Omega \rightarrow E_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow E_n$ des va.
 Les va $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes
 $\Leftrightarrow$ pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$, les évènements $(X_1 = x_1), \dots, (X_n = x_n)$ sont mutuellement indépendants.

Proposition.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.
 Soit $X_1, \dots, X_n$ des va mutuellement indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p . Alors $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi binômiale de paramètres n et p .

6 Espérance

6.a Définition et théorème de transfert

Définition.

Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une va réelle.
 On appelle espérance de X et on note $E(X)$ le réel $\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x)x$
 ($E(X)$ est la moyenne des valeurs que peut prendre X pondérée par leurs probabilités).

Théorème (Théorème de transfert).

Soit $X : \Omega \rightarrow E$ une va et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Alors $E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x)f(x)$.

6.b Exemples usuels

Proposition.

Soit X une va réelle.
 Si X est certaine de valeur C où $C \in \mathbb{R}$, $E(X) = C$.
 Si $X \sim U([1, n])$ où $n \in \mathbb{N}^*$, $E(X) = \frac{n+1}{2}$.
 Si $X \sim \mathcal{B}(p)$ où $p \in]0, 1[$, $E(X) = p$.
 Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$, $E(X) = np$.

Démonstration.

Supposons X certaine de valeur C où $C \in \mathbb{R}$.
 $X(\Omega) = \{C\}$. $E(X) = P(X = C)C = 1 \times C = C$.
 Supposons $X \sim U([1, n])$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

$$X(\Omega) = [[1, n]]. E(X) = \sum_{k=1}^n P(X = k)k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n}k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

Supposons $X \sim \mathcal{B}(p)$ où $p \in]0, 1[$. $X(\Omega) = \{0, 1\}$.

$$E(X) = P(X = 0)0 + P(X = 1)1 = (1 - p)0 + p1 = p.$$

Supposons $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } k \in [[1, n]], \binom{n}{k} &= \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} \text{ (car } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k} \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = \\ &\frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}) \text{ donc } k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}. X(\Omega) = [[0, n]]. E(X) = \sum_{k=0}^n P(X = k)k = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} p^k = \\ &\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} p^k = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} (1-p)^{n-k} p^k = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} (1-p)^{n-k} p^k = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} p^{k-1} p = \\ &np \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} p^{k-1} \underbrace{=}_{l=k-1} np \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} (1-p)^{(n-1)-l} p^l = np((1-p) + p)^{n-1} = np1^{n-1} = \\ &np. \end{aligned}$$

□

6.c Propriétés

Proposition (linéarité).

Pour tout $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $E(\lambda X) = \lambda E(X)$.

Proposition.

Soit X une va réelle et $C \in \mathbb{R}$. $E(X + C) = E(X) + C$.

Proposition.

Soit X et Y des va réelles. On suppose X et Y indépendantes. Alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Proposition (positivité).

Soit X une va réelle. On suppose X positive. Alors $E(X) \geq 0$.

Proposition (croissance).

Soit X et Y des va réelles. On suppose $X \leq Y$. Alors $E(X) \leq E(Y)$.

Proposition (inégalité de Markov).

Soit X une va réelle positive et $a > 0$. $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$.

7 Variance

7.a Définition et théorème de König-Huygens

Définition.

Soit X une va réelle.

On appelle variance de X et on note $V(X)$ le réel positif $E((X - E(X))^2)$.

On appelle écart type de X le réel positif $\sqrt{V(X)}$.

Théorème (théorème de König-Huygens).

Soit X une va réelle. $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

7.b Exemples usuels

Proposition.

Soit X une va réelle.

Si X est certaine de valeur C où $C \in \mathbb{R}$, $V(X) = 0$.

Si $X \sim U([1, n])$ où $n \in \mathbb{N}^*$, $V(X) = \frac{(n-1)(n+1)}{12}$.

Si $X \sim \mathcal{B}(p)$ où $p \in]0, 1[$, $V(X) = p(1-p)$.

Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$, $V(X) = np(1-p)$.

Démonstration.

Supposons X certaine de valeur C où $C \in \mathbb{R}$.

$V(X) = E((X - E(X))^2)$. $E(X) = C$ donc $X - E(X)$ est nulle donc $(X - E(X))^2$ est nulle donc $E((X - E(X))^2) = 0$ donc $V(X) = 0$.

Supposons $X \sim U([1, n])$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2. \quad E(X) = \frac{n+1}{2}. \quad X(\Omega) = [1, n]. \quad E(X^2) = \sum_{k=1}^n P(X = k)k^2 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n}k^2 = \\ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{1}{n} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}. \quad V(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = (n+1) \left[\frac{2n+1}{6} - \frac{n+1}{4} \right] = \\ (n+1) \frac{2(2n+1) - 3(n+1)}{12} &= (n+1) \frac{n-1}{12} = \frac{(n-1)(n+1)}{12}. \end{aligned}$$

Supposons $X \sim \mathcal{B}(p)$ où $p \in]0, 1[$.

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2. \quad E(X) = p. \quad X(\Omega) = \{0, 1\}. \quad E(X^2) = P(X = 0)0^2 + P(X = 1)1^2 = \\ (1-p) \times 0 + p \times 1 &= p. \quad V(X) = p - p^2 = p(1-p). \end{aligned}$$

Supposons $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2. \quad E(X) = np. \quad \text{Pour tout } k \in [2, n], \quad \binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} = \frac{n(n-1)}{k(k-1)} \binom{n-2}{k-2} \\ \text{donc } k(k-1) \binom{n}{k} &= n(n-1) \binom{n-2}{k-2}. \quad X(\Omega) = [0, n]. \quad E(X(X-1)) = \sum_{k=0}^n P(X = k)k(k-1) = \\ \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} p^k &= \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} p^k = \sum_{k=2}^n n(n-1) \binom{n-2}{k-2} (1-p)^{n-k} p^k = \\ n(n-1) \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} (1-p)^{n-k} p^k &= n(n-1) \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} (1-p)^{(n-2)-(k-2)} p^{k-2} p^2 = n(n-1) p^2 \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} (1-p)^{(n-2)-(k-2)} p^{k-2} \\ &= n(n-1) p^2 \sum_{l=0}^{n-2} \binom{n-2}{l} (1-p)^{(n-2)-l} p^l = n(n-1) p^2 ((1-p) + p)^{n-2} = n(n-1) p^2 1^{n-2} = n(n-1) p^2. \\ E(X^2) &= E(X(X-1) + X) = E(X(X-1)) + E(X). \quad V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = n(n-1) p^2 + np - (np)^2 = n^2 p^2 - np^2 + np - n^2 p^2 = np - np^2 = np(1-p). \end{aligned}$$

□

7.c Propriétés

Proposition.

Soit X une va réelle et $C \in \mathbb{R}$. $V(X + C) = V(X)$.
Soit X une va réelle et $\lambda \in \mathbb{R}$. $V(\lambda X) = \lambda^2 V(X)$.

Proposition (inegalité de Bienaymé-Tchebychev).

Soit X une va réelle et $a > 0$. $P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$.

8 Covariance

8.a Définition

Définition.

Si X et Y sont deux va réelles,
on appelle covariance de X et Y le réel $Cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$.
En particulier, si X est une va réelle, $Cov(X, X) = V(X)$.

Proposition.

Soit X et Y deux va réelles. $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

Définition.

Soit X et Y deux va réelles.
On dit que X et Y sont non corrélées ssi $Cov(X, Y) = 0$ i.e. $E(XY) = E(X)E(Y)$.
En particulier, si X et Y sont indépendantes alors X et Y sont non corrélées.

8.b Propriétés

Proposition.

Cov est une forme bilinéaire symétrique.

Proposition.

Soit X et Y deux va réelles. $V(X + Y) = V(X) + 2Cov(X, Y) + V(Y)$.
En particulier, $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ ssi X et Y sont non corrélées.

Proposition.

Soit $X_1, \dots, X_n$ des va réelles.
Si $X_1, \dots, X_n$ sont 2 à 2 non corrélées, $V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n)$.
En particulier, si $X_1, \dots, X_n$ sont 2 à 2 indépendantes, $V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n)$.