

Sujet 1

Dans cette partie, on note E l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, c'est-à-dire l'ensemble des réels non entiers.

1. Pour tout $a \in E$, soit Φ_a la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $\Phi_a(x) = \begin{cases} \frac{\cos(2ax) - 1}{\sin x} & \text{si } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
- a) Montrer que la fonction Φ_a est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et que la fonction Φ'_a est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
- b) Montrer que la fonction Φ_a est dérivable en 0 et que $\Phi'_a(0) = -2a^2$.
- c) Pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, calculer $\Phi'_a(x)$ et déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \Phi'_a(x)$.
- d) En déduire que la fonction Φ'_a est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\forall a \in E, \Gamma_n(a) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi_a(t) \sin((2n+1)t) dt$.

À l'aide d'une intégration par parties, établir l'existence d'un réel $\mu > 0$ tel que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $|\Gamma_n(a)| \leq \frac{\mu}{n}$. En déduire la limite de $\Gamma_n(a)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Pour tout $a \in E$, soit $(I_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(J_n(a))_{n \in \mathbb{N}^*}$ les deux suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n(a) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{a+k} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, J_n(a) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{a-k}$$

a)

Établir pour tout $a \in E$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la relation : $\Gamma_k(a) - \Gamma_{k-1}(a) = (-1)^k \sin(\pi a) \left(\frac{1}{a+k} + \frac{1}{a-k} \right)$.

b) Calculer $\Gamma_0(a)$.

c) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $a \in E$, l'égalité : $\frac{\Gamma_n(a)}{\sin(\pi a)} = I_n(a) + J_n(a) - \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$.

4. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = (-1)^n \frac{2a}{a^2 - n^2}$.

a) Montrer que pour tout $a \in E$, la série de terme général u_n est convergente.

b) Établir la relation : $\forall a \in E, \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2a}{a^2 - n^2} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)} - \frac{1}{a}$.

Sujet 2

On pose $I_0 = \int_0^1 e^{-x^2} dx$ et pour tout entier $n \geq 1$, $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x^2} dx$.

1.a) Établir pour tout $x \in [0, 1]$, l'encadrement : $0 \leq e^{-x^2} \leq 1$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

c) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par : $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) = e^{-x^2}$. On note f' la dérivée de f .

a) Pour tout $x \in [0, 1]$, calculer $f'(x)$.

b) En déduire que $I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}$.

3.a) En utilisant l'identité $x^{n+2} e^{-x^2} = x^{n+1} \times x e^{-x^2}$ et à l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout entier naturel n , la relation : $I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n - \frac{1}{2e}$.

b) Déterminer la limite de $n I_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Pour tout entier naturel n , on pose : $u_n = \frac{I_{2n+1}}{n!}$.

a) Établir la relation : $u_{n+1} = u_n - \frac{1}{2e} \times \frac{1}{(n+1)!}$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

b) Donner sous forme de somme, l'expression de I_{2n+1} en fonction de n .

Sujet 3

Calcul de la somme de la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^\pi \left(\frac{x^2}{2\pi} - x \right) \cos(kx) dx = \frac{1}{k^2}$.

2. Soit $x \in]0, \pi]$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} = \frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{\sin(\frac{\pi}{2})} e^{i \frac{(n+1)\pi}{2}}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{\sin(\frac{n\pi}{2}) \cos(\frac{(n+1)\pi}{2})}{\sin(\frac{\pi}{2})}$.

3. Soit ψ une fonction réelle de classe C^1 sur $[0, \pi]$. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \psi(x) \sin(mx) dx = 0$.

4. Soit g la fonction réelle définie sur $[0, \pi]$ par $\begin{cases} g(x) = \frac{\frac{x^2}{2\pi} - x}{2 \sin(\frac{\pi}{2})} & \text{si } x \in]0, \pi] \\ g(0) = -1 \end{cases}$

Montrer que g est de classe C^1 sur $[0, \pi]$.

5. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi g(x) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2} x\right) dx$.

b) Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ et montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.