Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2023

Épreuve de mathématiques

Durée : 4h

L'épreuve est constituée de deux exercices indépendants.

Exercice 1. Une inégalité entre sommes de séries

On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des suites réelles (indexées par $\mathbb{N}^*$) à termes strictement positifs telles que la série $\sum a_n$ converge. On pose, pour tout élément $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathscr{E}$ et pour tout entier n non nul,

$$h_n = \frac{n}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}}.$$

L'objet de l'exercice est de prouver la convergence de la série $\sum h_n$ et de comparer sa somme à celle de la série $\sum a_n$.

1. `Un premier exemple`

   On pose, dans cette question, pour tout entier naturel n non nul, $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

   (a) Montrer que la série $\sum a_n$ converge et déterminer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

   (b) i. Calculer, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de h_n.

   ii. Établir la convergence de la série $\sum h_n$ et déterminer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} h_n$.

2. `Un second exemple`

   Soit q un réel de $]0,1[$. On pose, pour tout entier naturel n non nul, $a_n = q^{n-1}$.

   (a) Indiquer la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ et pour tout entier naturel n non nul, la valeur de h_n.

   (b) Établir la convergence de la série $\sum h_n$ et prouver la majoration : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} h_n \leqslant \frac{1}{(1-q)^2}$.

3. Soit n un entier non nul et soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ deux n-uplets de nombres réels.

   (a) Prouver l'égalité : $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \left(x_i y_j - x_j y_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$.

   (b) En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$.

4. Prouver, pour tout entier naturel k non nul, l'inégalité : $\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{2k^2}$.

   On s'intéressera à la monotonie de la suite de terme général $u_k = \frac{1}{2k^2} - \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$.

5. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un élément de $\mathscr{E}$.

   (a) Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité :

   $$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right).$$

   (b) En déduire, pour tout entier naturel p non nul, l'inégalité :

   $$\sum_{n=1}^{p} h_n \leqslant 4 \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n(n+1)^2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 a_k\right).$$

   (c) Prouver, pour tout entier naturel p non nul, l'inégalité : $\sum_{n=1}^{p} h_n \leqslant 2 \sum_{k=1}^{p} a_k$.

   (d) En déduire la convergence de la série $\sum h_n$ et l'inégalité : $\sum_{n=1}^{+\infty} h_n \leqslant 2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

6. Soit C un réel strictement positif tel que, pour tout élément $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathscr{E}$, on a

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} h_n \leqslant C \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

   On va montrer que C est au moins égal à 2.

   On pose, pour tout entier naturel n non nul, $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ où α est un réel strictement supérieur à 1 et on rappelle qu'on dispose de l'égalité : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

   (a) Prouver l'inégalité : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)^{\alpha+1}} \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} - \frac{\pi^2}{6}$.

   (b) Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité : $h_n \geqslant (\alpha+1)\,\frac{n}{(n+1)^{\alpha+1}}$.

   (c) Prouver l'égalité : $\lim_{\substack{\alpha\to 1\\ >}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$.

(d) Conclure que $C \geqslant 2$.

7. On suppose qu'il existe un réel $K > 0$ tel que, pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à termes réels strictement positifs dont la série $\sum a_n$ converge, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leqslant K \sum_{n=1}^{+\infty} h_n$.

(a) Justifier l'inégalité : $K \geqslant 1$.
On pourra utiliser le résultat de la question 2.

(b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On pose $g_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n non nul,

$$g_n = \begin{cases} \dfrac{4}{2^n} & \text{si } \exists\, p \in [\![1, N]\!] \quad n = p^2 \\ \\ \dfrac{1}{2^n} & \text{sinon.} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad a_n = \frac{(g_n)^n}{(g_{n-1})^{n-1}}.$$

i. Calculer a_n pour $n > N^2 + 1$ et en déduire la convergence de la série $\sum a_n$.

ii. Prouver les inégalités : $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n \leqslant 4$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \geqslant 2N$.

(c) Établir l'égalité : $(g_n)^n = \prod_{k=1}^{n} a_k$.

(d) Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité $h_n \leqslant g_n$ et en déduire qu'un tel réel K n'existe pas.

Exercice 2. Premier numéro manquant

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ avec $1 \leqslant n < N$ et $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ une famille de variables aléatoires **indépendantes** toutes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$ et toutes de loi uniforme sur l'intervalle entier $[\![1, N]\!]$. On note, pour tout entier naturel n non nul, T l'application qui, à chaque $\omega \in \Omega$, associe

$$T(\omega) = \min\left\{k \in [\![1, N]\!]\,;\, \forall\, i \in [\![1, n]\!] \quad X_i(\omega) \neq k\right\}.$$

Si on se représente l'expérience aléatoire consistant à tirer n fois successivement, avec remise, une boule dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N, la valeur $T(\omega)$ serait le numéro aléatoire du plus petit numéro qui ***n'est pas*** *apparu dans la liste ω des numéros tirés au cours de la succession de ces n tirages.*

Partie A : Deux cas particuliers

Soit N un entier au moins égal à 4 et X, Y et Z trois variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$, **indépendantes** et toutes trois de loi uniforme sur l'intervalle entier $[\![1, N]\!]$. On note U et V les applications qui, à chaque $\omega \in \Omega$, associent

$$U(\omega) = \min\left\{k \in [\![1, N]\!]\,;\, X(\omega) \neq k \text{ et } Y(\omega) \neq k\right\}.$$

et

$$V(\omega) = \min\left\{k \in [\![1, N]\!]\,;\, X(\omega) \neq k, Y(\omega) \neq k \text{ et } Z(\omega) \neq k\right\}.$$

1. (a) Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable aléatoire U ?

(b) Déterminer la loi de la variable aléatoire U.

(c) Calculer l'espérance de U.

2. (a) Calculer $\mathbf{P}(V=1)$ et $\mathbf{P}(V=4)$.

(b) Établir l'égalité : $\mathbf{P}(V=3) = \dfrac{6N-12}{N^3}\cdot$

(c) En déduire que l'espérance de V vaut $\left(1+\dfrac{1}{N}\right)^3\cdot$

Partie B : Des égalités

On note Δ l'application qui, à tout polynôme réel $P(X)$, associe le polynôme

$$\Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X).$$

On observera que l'application Δ est linéaire.

On note, pour tout entier naturel k non nul, Δ^k l'application $\underbrace{\Delta\circ\Delta\circ\ldots\circ\Delta}_{k \text{ fois } \Delta}$ et on pose $\Delta^0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}[X]}$.

1. Soit $(j,n)\in\mathbb{N}^2$ avec $j\leqslant n$. Établir l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=j}^{n}\binom{k}{j} = \binom{n+1}{j+1}$.

2. Soit $n\in\mathbb{N}$ et $P := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

   Prouver, pour tout entier naturel m, l'égalité :

$$\Delta^m(P)(X) = \sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\binom{m}{j}P(X+j).$$

   On pourra procéder par récurrence sur l'entier m.

3. (a) Soit $q\in\mathbb{N}$ et $Q(X)\in\mathbb{R}[X]$ de degré q.
   Quel est, pour tout entier $r\in[\![0,q]\!]$, le degré de $\Delta^r(Q)(X)$?

   (b) Soit $n\in\mathbb{N}$ et $Q = X^n$. Que vaut $\Delta^n(Q)(X)$?

4. Soit $n\in\mathbb{N}$ et $P := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme réel de degré n.

   (a) Déduire des questions précédentes l'égalité :

$$a_n\, n! = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}P(X+j).$$

   (b) En déduire l'égalité :

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}\binom{n}{j}\left(1-\frac{j}{N}\right)^n = \frac{n!}{N^n}\cdot$$

   On utilisera le résultat précédent pour un polynôme P bien choisi.

5. Soit $(n,N) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

   (a) Établir, pour tout entier $m \geqslant n+1$, l'égalité :

$$\sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} \left(1 - \frac{j}{N}\right)^n = 0.$$

   (b) En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} \binom{n+1}{j} \left(1 - \frac{j}{N}\right)^n$.

Partie C : Le cas général

On reprend maintenant les notations du préambule.

Soit $(N,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leqslant n < N$.

1. (a) Déterminer la valeur de $\mathbf{P}(T=1)$.

   (b) Déterminer la valeur de $\mathbf{P}(T=n+1)$.

   (c) Établir l'égalité

$$\mathbf{P}(T=2) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{N}\right)^i \left(1 - \frac{2}{N}\right)^{n-i} \quad \text{puis l'égalité} \quad \mathbf{P}(T=2) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n - \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n.$$

   (d) Établir l'égalité : $\mathbf{P}(T=3) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n - 2\left(1 - \frac{2}{N}\right)^n + \left(1 - \frac{3}{N}\right)^n$.

2. *On admet que si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont n événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$ alors on dispose de la formule du crible suivante :*

$$\boldsymbol{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_j \leqslant n} \boldsymbol{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_j}).$$

   On pose, pour tout entier $p \in [\![1,n]\!]$, $A_p = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i \neq p]$.

   (a) Soit $j \in [\![1,n]\!]$. Que vaut la probabilité de l'intersection de j événements distincts pris parmi $A_1, A_2, \ldots, A_n$?

   (b) On note E^c le complémentaire d'un événement E. Justifier, pour tout entier $k \in [\![1,n]\!]$, l'égalité : $[T > k] = \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)^c$.

   (c) Obtenir, pour tout entier $k \in [\![1,n]\!]$, une expression de $\mathbf{P}(T > k)$ faisant intervenir un symbole de sommation.

3. (a) Soit $k \in [\![1,n+1]\!]$. Établir l'égalité : $\mathbf{P}(T=k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \binom{k-1}{i-1} \left(1 - \frac{i}{N}\right)^n$.

   (b) Retrouver, à l'aide du résultat précédent, les valeurs trouvées en fin de **partie A** pour les sommes

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \left(1 - \frac{j+1}{N}\right)^n \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \binom{n+1}{i} \left(1 - \frac{i}{N}\right)^n.$$

4. `Calcul de l'espérance de` T

   Soit $(N, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leqslant n < N$.

   (a) Établir, pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, l'égalité :

$$\mathbf{P}(T > k) = \left(\frac{N+1}{N}\right)^n \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{N+1-j}{N+1}\right)^n.$$

   (b) En utilisant le résultat de la question **B**-5-b) (avec $N \leftarrow N+1$) conclure à l'égalité :

$$\mathbf{E}(T) = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^n.$$