

Résumé du chapitre 1: logique et raisonnement

Table des matières

1	Assertions et connecteurs logiques	1
2	Quantificateurs	2
3	Méthodes de raisonnement	2
3.a	Par disjonction des cas	2
3.b	Par l'absurde	2
3.c	Par implication	2
3.d	Par récurrence	2

1 Assertions et connecteurs logiques

Définition.

Une assertion est un énoncé mathématique auquel on peut attribuer une valeur de vérité : vrai ou faux

Définition (Connecteurs "non", "et" et "ou").

- Soit P une assertion.
On appelle négation de P et on note $\text{non}(P)$ l'assertion qui est vraie ssi P est fausse.
- Soient P et Q deux assertions.
On note $P \text{ et } Q$ l'assertion qui est vraie ssi les deux assertions sont vraies.
On note $P \text{ ou } Q$ l'assertion qui est vraie ssi au moins l'une des deux assertions est vraie.

Proposition (lois de De Morgan).

Soit P et Q des assertions.
 $\text{non}(P \text{ ou } Q)$ équivaut à $\text{non}(P) \text{ et } \text{non}(Q)$
 $\text{non}(P \text{ et } Q)$ équivaut à $\text{non}(P) \text{ ou } \text{non}(Q)$

Définition (Connecteur $\Rightarrow$).

Soit P et Q deux assertions.
On appelle "P implique Q" et on note $P \Rightarrow Q$ l'assertion telle que :
-dans le cas P vraie et Q vraie, $P \Rightarrow Q$ est vraie
-dans le cas P vraie et Q fausse, $P \Rightarrow Q$ est fausse
-dans le cas P fausse, $P \Rightarrow Q$ est vraie (quelle que soit la valeur de vérité de Q)

Proposition (Négation d'une implication).

Soit P et Q deux assertions.

Par définition, $P \Rightarrow Q$ est fausse ssi P est vraie et Q est fausse.

$\text{non}(P \Rightarrow Q)$ équivaut à P et $\text{non}(Q)$.

Définition.

Soit P et Q deux assertions. $Q \Rightarrow P$ est appelée l'implication réciproque de $P \Rightarrow Q$

Définition (Connecteur $\Leftrightarrow$).

Soit P et Q deux assertions.

On appelle "P équivaut Q" et on note $P \Leftrightarrow Q$ l'assertion qui est vraie ssi P et Q ont même valeur de vérité.

Proposition (Une équivalence est une double implication).

Soit P et Q deux assertions.

$P \Leftrightarrow Q$ équivaut à $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.

Définition.

Soit P et Q deux assertions.

$\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$ est appelée l'implication contraposée de $P \Rightarrow Q$

Proposition (Une implication et sa contraposée sont équivalentes).

Soit P et Q des assertions. $P \Rightarrow Q$ équivaut à $\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$

2 Quantificateurs

Définition (Quantificateurs universel $\forall$ et existentiel $\exists$).

Soit $\mathcal{P}(x)$ une assertion dépendant d'une variable $x \in E$.

L'assertion "Pour tout $x \in E$, $\mathcal{P}(x)$ est vraie" se note : $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$

L'assertion "Il existe $x \in E$ tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie" se note : $\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$

Proposition (Négation de quantificateurs).

Soit $\mathcal{P}(x)$ une assertion dépendant d'une variable $x \in E$.

$\text{non}(\forall x \in E, \mathcal{P}(x))$ équivaut à $\exists x \in E, \text{non}(\mathcal{P}(x))$

$\text{non}(\exists x \in E, \mathcal{P}(x))$ équivaut à $\forall x \in E, \text{non}(\mathcal{P}(x))$

Définition (Pseudo-quantificateur $\exists!$).

Soit $\mathcal{P}(x)$ une assertion dépendant d'une variable $x \in E$.

L'assertion "Il existe un unique $x \in E$ tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie" se note : $\exists! x \in E, \mathcal{P}(x)$

3 Méthodes de raisonnement

3.a Par disjonction des cas

3.b Par l'absurde

3.c Par implication

3.d Par récurrence