

Résumé du chapitre 5: sommes et produits indexés par un intervalle d'entiers

Table des matières

1	Définition	1
2	Propriétés	1
3	Formule du binôme de Newton	2
4	Le télescopage	3
5	Identité remarquable $a^n - b^n$ et somme $1 + q + \dots + q^n$.	3

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1 Définition

Définition.

Soit $(p, n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $p \leq n$. Soit $x_p, x_{p+1}, \dots, x_n$ des réels (ou des complexes).

$\sum_{k=p}^n x_k = x_p + x_{p+1} + \dots + x_n$ se lit "somme des x_k pour k variant de p à n "

$\prod_{k=p}^n x_k = x_p \times x_{p+1} \times \dots \times x_n$ se lit "produit des x_k pour k variant de p à n "

Proposition.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 2 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2 Propriétés

Proposition.

$\sum_{k=p}^n (x_k + y_k) = \sum_{k=p}^n x_k + \sum_{k=p}^n y_k$ et $\sum_{k=p}^n \lambda x_k = \lambda \sum_{k=p}^n x_k$ (linéarité)

$\prod_{k=p}^n (x_k \times y_k) = \left(\prod_{k=p}^n x_k \right) \times \left(\prod_{k=p}^n y_k \right)$ et $\prod_{k=p}^n x_k^\lambda = \left(\prod_{k=p}^n x_k \right)^\lambda$

Démonstration. $\sum_{k=p}^n (x_k + y_k) = (x_p + y_p) + (x_{p+1} + y_{p+1}) + \dots + (x_n + y_n)$

$$\begin{aligned}
&= (x_p + x_{p+1} + \dots + x_n) + (y_p + y_{p+1} + \dots + y_n) = \sum_{k=p}^n x_k + \sum_{k=p}^n y_k \\
&\sum_{k=p}^n \lambda x_k = \lambda x_p + \lambda x_{p+1} + \dots + \lambda x_n = \lambda(x_p + x_{p+1} + \dots + x_n) = \lambda \sum_{k=p}^n x_k \\
&\prod_{k=p}^n (x_k \times y_k) = (x_p \times y_p) \times (x_{p+1} \times y_{p+1}) \times \dots \times (x_n \times y_n) \\
&= (x_p \times x_{p+1} \times \dots \times x_n) \times (y_p \times y_{p+1} \times \dots \times y_n) = \left(\prod_{k=p}^n x_k\right) \times \left(\prod_{k=p}^n y_k\right) \\
&\prod_{k=p}^n x_k^\lambda = x_p^\lambda \times x_{p+1}^\lambda \times \dots \times x_n^\lambda = (x_p \times x_{p+1} \times \dots \times x_n)^\lambda = \left(\prod_{k=p}^n x_k\right)^\lambda
\end{aligned}$$

□

Proposition (Relation de Chasles).

$$\text{Si } p < q < n, \sum_{k=p}^n x_k = \sum_{k=p}^q x_k + \sum_{k=q+1}^n x_k \text{ et } \prod_{k=p}^n x_k = \prod_{k=p}^q x_k \times \prod_{k=q+1}^n x_k$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=p}^q x_k + \sum_{k=q+1}^n x_k = (x_p + x_{p+1} + \dots + x_q) + (x_{q+1} + \dots + x_n) \\
&= x_p + x_{p+1} + \dots + x_q + x_{q+1} + \dots + x_n = \sum_{k=p}^n x_k \\
&\prod_{k=p}^q x_k \times \prod_{k=q+1}^n x_k = (x_p \times x_{p+1} \times \dots \times x_q) \times (x_{q+1} \times \dots \times x_n) \\
&= x_p \times x_{p+1} \times \dots \times x_q \times x_{q+1} \times \dots \times x_n = \prod_{k=p}^n x_k
\end{aligned}$$

□

Proposition (Réindexation).

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=p}^n x_{k+d} = \sum_{l=p+d}^{n+d} x_l \text{ et } \prod_{k=p}^n x_{k+d} = \prod_{l=p+d}^{n+d} x_l \\
&(\text{changement d'indice } l = k + d : \text{ lorsque } k \text{ varie entre } p \text{ et } n, l \text{ varie entre } p + d \text{ et } n + d)
\end{aligned}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=p}^n x_{k+d} = x_{p+d} + x_{p+1+d} + \dots + x_{n+d} = x_{p+d} + x_{p+d+1} + \dots + x_{n+d} = \sum_{l=p+d}^{n+d} x_l \\
&\prod_{k=p}^n x_{k+d} = x_{p+d} \times x_{p+1+d} \times \dots \times x_{n+d} = x_{p+d} \times x_{p+d+1} \times \dots \times x_{n+d} = \prod_{l=p+d}^{n+d} x_l
\end{aligned}$$

□

3 Formule du binôme de Newton

Définition.

Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$.

On appelle "k parmi n" l'entier $\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$

Proposition.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [[0, n]]$. $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$

Proposition (Relation de Pascal).

Soit $(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

Proposition (Formule du binôme de Newton).

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}a^{n-k}b^k$.

4 Le télescope

Proposition.

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^n (x_k - x_{k+1}) &= x_p - x_{n+1} \text{ et } \prod_{k=p}^n \frac{x_k}{x_{k+1}} = \frac{x_p}{x_{n+1}} \\ \sum_{k=p}^n (x_{k+1} - x_k) &= x_{n+1} - x_p \text{ et } \prod_{k=p}^n \frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{x_{n+1}}{x_p} \\ \sum_{k=p}^n (x_{k-1} - x_k) &= x_{p-1} - x_n \text{ et } \prod_{k=p}^n \frac{x_{k-1}}{x_k} = \frac{x_{p-1}}{x_n} \\ \sum_{k=p}^n (x_k - x_{k-1}) &= x_n - x_{p-1} \text{ et } \prod_{k=p}^n \frac{x_k}{x_{k-1}} = \frac{x_n}{x_{p-1}} \end{aligned}$$

(Dans chaque cas il ne reste que les deux termes de plus petit et de plus grand indice)

Démonstration.

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^n (x_k - x_{k+1}) &= (x_p - x_{p+1}) + (x_{p+1} - x_{p+2}) + (x_{p+2} - x_{p+3}) \dots + (x_n - x_{n+1}) = x_p - x_{n+1} \\ \prod_{k=p}^n \frac{x_k}{x_{k+1}} &= \frac{x_p}{x_{p+1}} \frac{x_{p+1}}{x_{p+2}} \frac{x_{p+2}}{x_{p+3}} \dots \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{x_p}{x_{n+1}} \end{aligned}$$

Le reste se prouve de manière similaire. □

5 Identité remarquable $a^n - b^n$ et somme $1 + q + \dots + q^n$.

Proposition.

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1}) = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k$$

Proposition.

Soit $q \in \mathbb{K} \setminus \{1\}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

Démonstration. $1 - q^{n+1} = 1^{n+1} - q^{n+1} = (1 - q) \sum_{k=0}^n 1^{n-k} q^k = (1 - q) \sum_{k=0}^n q^k$ donc $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ □