

Attention à ne pas oublier le i dans la formule d'Euler pour le sinus :

Ceci est correct : $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$. Mais ceci est incorrect : $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$

Attention à ne jamais oublier les parenthèses.

Par exemple :

Ceci est correct : $e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}$. Mais ceci est incorrect : $e^{i\theta + \frac{\pi}{2}}$.

Ceci est correct : $\sum_{k=1}^n (k(p_{k-1} - p_k) - p_k)$. Mais ceci est incorrect : $\sum_{k=1}^n k(p_{k-1} - p_k) - p_k$

Attention : les notations $Z^{\frac{1}{n}}$ et $\ln(Z)$ n'ont aucun sens pour un complexe Z en général.

Par exemple :

Ceci est correct : $e^{i\frac{2\pi}{4}}$. Mais ceci est incorrect : $(e^{i\frac{2\pi}{3}})^{\frac{1}{4}}$.

Attention : il faut toujours penser à simplifier.

Par exemple :

$$\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$\ln(\sqrt{2}) = \ln(2^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\ln(2)$$

$$4^{\frac{1}{4}} = (2^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{2 \times \frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}}$$

Attention : il faut connaître le résultat du cours concernant les racines d'un trinôme à coefficients réels de discriminant strictement négatif.

Attention : une équation ou un système simple se résout par équivalences successives

Exemple pour une équation :

$$Z = -1 - i, |Z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, Z = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$

Pour tout complexe $z = x + iy$,

$$e^z = -1 - i \Leftrightarrow e^x e^{iy} = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow e^x = \sqrt{2} \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z}, y = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \ln(\sqrt{2}) \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z}, y = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, z = \ln(\sqrt{2}) + i\left(-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

$$\ln(\sqrt{2}) = \ln(2^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\ln(2)$$

Donc les solutions sont les complexes de la forme $\frac{1}{2}\ln(2) + i\left(-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple pour un système :

$$(z - z_1)(z - z_2) = z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1z_2.$$

$$\text{Donc } \begin{cases} z_1 + z_2 = -2 \\ z_1z_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow z_1 \text{ et } z_2 \text{ sont les racines du trinôme } z^2 + 2z + 5$$

$\Delta = 2^2 - 4 \times 5 = 4 - 20 = -16$. $\Delta < 0$ donc $z^2 + 2z + 5$ admet

deux racines complexes conjuguées $\frac{-2+i\sqrt{16}}{2} = -1 + 2i$ et $\frac{-2-i\sqrt{16}}{2} = -1 - 2i$

$$\text{Donc } \begin{cases} z_1 + z_2 = -2 \\ z_1z_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow (z_1, z_2) = (-1 + 2i, -1 - 2i) \text{ ou } (z_1, z_2) = (-1 - 2i, -1 + 2i).$$

Donc les solutions sont $(-1 + 2i, -1 - 2i)$ et $(-1 - 2i, -1 + 2i)$.