

Résumé du chapitre 14: nombres réels

Table des matières

1	Opérations algébriques	1
2	Relation d'ordre $\leq$	1
3	Valeur absolue	1
4	Parties de $\mathbb{R}$	1
4.a	Plus grand élément. Plus petit élément.	1
4.b	Majorant. Minorant	2
4.c	Borne supérieure. Borne inférieure.	2
4.d	Partie bornée	3
5	Intervalles	3
6	Partie entière	3

1 Opérations algébriques

2 Relation d'ordre $\leq$

3 Valeur absolue

Définition.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle valeur absolue de x le réel positif $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Proposition.

$\forall x \in \mathbb{R}, |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 |x \times y| = |x| \times |y|$
 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 |x + y| \leq |x| + |y|$ et $|x + y| = |x| + |y| \Leftrightarrow x$ et y sont de même signe
(inégalité triangulaire et cas d'égalité)

4 Parties de $\mathbb{R}$

4.a Plus grand élément. Plus petit élément.

Définition.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

On dit que A admet un plus grand élément ssi :

$$\exists a \in A, \forall x \in A, x \leq a$$

Dans ce cas, a est unique appelé le plus grand élément de A et noté $\max(A)$.

Définition.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

On dit que A admet un plus petit élément ssi :

$$\exists a \in A, \forall x \in A, a \leq x$$

Dans ce cas, a est unique appelé le plus petit élément de A et noté $\min(A)$

Proposition.

Toute partie de $\mathbb{R}$ finie non vide admet un plus grand et un plus petit élément.

4.b Majorant. Minorant

Définition.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

On dit que A est majorée ssi :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, x \leq M.$$

Dans ce cas, on dit que M est un majorant de A .

Définition.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

On dit que A est minorée ssi :

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A, m \leq x$$

Dans ce cas, on dit que m est un minorant de A .

Proposition.

Toute partie de $\mathbb{Z}$ non vide et majorée admet un plus grand élément.

Toute partie de $\mathbb{Z}$ non vide et minorée admet un plus petit élément.

4.c Borne supérieure. Borne inférieure.

Axiome-Définition.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée.
L'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément (axiome).
On appelle borne supérieure de A et on note $\sup(A)$ le plus petit des majorants de A .

Proposition.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide.
On suppose que A admet un majorant M (i.e. $\forall x \in A, x \leq M$).
 $M = \sup(A) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists x \in A, M - \epsilon < x$ (caractérisation de la borne supérieure)

Démonstration. $M = \sup(A)$

$\Leftrightarrow M$ est le plus petit des majorants de A
 $\Leftrightarrow \forall M' \in \mathbb{R}, M'$ est majorant de $A \Rightarrow M \leq M'$
 $\Leftrightarrow \forall M' \in \mathbb{R}, M' < M \Rightarrow M'$ n'est pas majorant de A
 $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, M - \epsilon$ n'est pas majorant de A (changement de variable $M' = M - \epsilon$)
 $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists x \in A, M - \epsilon < x$

□

Axiome-Définition.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée.
L'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément (axiome).
On appelle borne inférieure de A et on note $\inf(A)$ le plus grand des minorants de A .

Proposition.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide.
On suppose que A admet un minorant m (i.e. $\forall x \in A, m \leq x$).
 $m = \inf(A) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists x \in A, x < m + \epsilon$ (caractérisation de la borne inférieure)

4.d Partie bornée

Définition.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est bornée ssi A est minorée et majorée.

5 Intervalles

Proposition.

Soit I une partie de $\mathbb{R}$ telle que : $\forall (u, v) \in I^2, \forall x \in \mathbb{R}, u \leq x \leq v \Rightarrow x \in I$
Alors I est un intervalle

6 Partie entière

Définition.

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists ! k \in \mathbb{Z}, k \leq x < k + 1$

k est appelé la partie entière de x et noté $\lfloor x \rfloor$.