

# Résumé du chapitre 16: limites de suites

## Table des matières

|     |                                                                          |   |
|-----|--------------------------------------------------------------------------|---|
| 1   | Définition de la convergence                                             | 1 |
| 2   | Résultats sur la convergence                                             | 2 |
| 3   | Définition de la divergence vers $\pm\infty$                             | 2 |
| 4   | Résultat sur les suites divergeant vers $\pm\infty$                      | 3 |
| 5   | Limites dans $\overline{\mathbb{R}}$                                     | 3 |
| 6   | Théorèmes d'existence de limites                                         | 3 |
| 6.a | Théorèmes opératoires . . . . .                                          | 3 |
| 6.b | Théorèmes utilisant des inégalités . . . . .                             | 3 |
| 6.c | Théorème de la limite monotone . . . . .                                 | 4 |
| 6.d | Suites adjacentes . . . . .                                              | 4 |
| 6.e | Suites extraites . . . . .                                               | 5 |
| 7   | Passage à la limite dans les inégalités larges                           | 5 |
| 8   | Suites récurrentes                                                       | 5 |
| 8.a | Problème d'existence d'une suite récurrente, intervalle stable . . . . . | 5 |
| 8.b | Monotonie d'une suite récurrente . . . . .                               | 5 |
| 8.c | Limite d'une suite récurrente, point fixe . . . . .                      | 5 |
| 9   | Suites complexes                                                         | 6 |

## 1 Définition de la convergence

### Définition.

Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle.  
On dit que  $u$  converge vers un réel  $l$  ssi :  
 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \epsilon$   
On dit que  $u$  diverge ssi  $u$  ne converge pas.

## Démonstrations de résultats sur la convergence

### Proposition.

Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des suites réelles.  
On suppose que  $u$  converge vers  $l_1$  et  $v$  converge vers  $l_2$ . Alors  $u + v$  converge vers  $l_1 + l_2$ .

*Démonstration.* Soit  $\epsilon > 0$ .

(Montrons qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq N \Rightarrow |(u_n + v_n) - (l_1 + l_2)| \leq \epsilon$ )

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|(u_n + v_n) - (l_1 + l_2)| = |(u_n - l_1) + (v_n - l_2)| \leq |u_n - l_1| + |v_n - l_2|$

(Appliquons la convergence de  $u$  vers  $l_1$  avec  $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2}$ )

$u$  converge vers  $l_1$  donc il existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l_1| \leq \frac{\epsilon}{2}$ .

(Appliquons la convergence de  $v$  vers  $l_2$  avec  $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2}$ )

$v$  converge vers  $l_2$  donc il existe  $N_2 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq N_2 \Rightarrow |v_n - l_2| \leq \frac{\epsilon}{2}$ .

Posons  $N = \max(\{N_1, N_2\})$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq N \Rightarrow n \geq N_1$  et  $n \geq N_2 \Rightarrow |u_n - l_1| \leq \frac{\epsilon}{2}$  et  $|v_n - l_2| \leq \frac{\epsilon}{2}$

$\Rightarrow |u_n - l_1| + |v_n - l_2| \leq \epsilon \Rightarrow |(u_n + v_n) - (l_1 + l_2)| \leq \epsilon$

Donc  $u + v$  converge vers  $l_1 + l_2$ . □

### Proposition.

Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

On suppose que  $u$  converge vers  $l$ . Alors  $\lambda u$  converge vers  $\lambda l$

*Démonstration.* Soit  $\epsilon > 0$ .

(Montrons qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq N \Rightarrow |\lambda u_n - \lambda l| \leq \epsilon$ )

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|\lambda u_n - \lambda l| = |\lambda| |u_n - l|$ .

(Appliquons la convergence de  $u$  vers  $l$  avec  $\epsilon' = \frac{\epsilon}{|\lambda|}$ )

Ecartons le cas simple  $\lambda = 0$ .

$u$  converge vers  $l$  donc il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \frac{\epsilon}{|\lambda|}$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \frac{\epsilon}{|\lambda|} \Rightarrow |\lambda| |u_n - l| \leq \epsilon \Rightarrow |\lambda u_n - \lambda l| \leq \epsilon$

Donc  $\lambda u$  converge vers  $\lambda l$ . □

## 2 Résultats sur la convergence

### Proposition (Théorèmes opératoires).

- Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des suites réelles. Si  $u$  converge vers un réel  $l_1$  et  $v$  converge vers un réel  $l_2$  alors  $u + v$  converge vers  $l_1 + l_2$ .
- Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Si  $u$  converge vers un réel  $l$  alors  $\lambda u$  converge vers  $\lambda l$ .
- Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des suites réelles. Si  $u$  converge vers un réel  $l_1$  et  $v$  converge vers un réel  $l_2$  alors  $uv$  converge vers  $l_1 l_2$ .
- Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle. Si  $u$  converge vers un réel  $l$  et  $l \neq 0$  alors il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \in [N, +\infty[$ ,  $u_n \neq 0$  et  $\frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{l}$ .
- Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des suites réelles. Si  $u$  converge vers un réel  $l_1$  et  $v$  converge vers un réel  $l_2$  et  $l_2 \neq 0$  alors  $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{l_1}{l_2}$ .

### Proposition.

Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle.

On suppose que  $u$  converge vers un réel  $l$ . Alors  $|u|$  converge vers  $|l|$ .

**Proposition.**

Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle. Si  $u$  admet une limite réelle alors celle-ci est unique, appelée la limite de  $u$  et notée  $\lim_{+\infty} u$  ou  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

**Proposition.**

Toute suite réelle convergente est bornée

**Proposition.**

Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle. Soit  $a \in \mathbb{R}$ .

- Si  $u$  converge vers un réel  $l$  et  $l < a$ .  
alors il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \in [[N, +\infty[[$ ,  $u_n < a$
- Si  $u$  converge vers un réel  $l$  et  $l > a$ .  
alors il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \in [[N, +\infty[[$ ,  $u_n > a$ .

### 3 Définition de la divergence vers $\pm\infty$

**Définition.**

Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle.

On dit que  $u$  diverge vers  $+\infty$  ssi :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \geq A$$

On dit que  $u$  diverge vers  $-\infty$  ssi :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \leq A$$

### 4 Résultat sur les suites divergeant vers $\pm\infty$

**Proposition.**

- Toute suite réelle divergeant vers  $+\infty$  est minorée non majorée.
- Toute suite réelle divergeant vers  $-\infty$  est majorée non minorée.

### 5 Limites dans $\overline{\mathbb{R}}$

**Propriété.**

Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle. Si admet une limite dans  $\overline{\mathbb{R}}$ , celle-ci est unique, appelée la limite de  $u$  et noté  $\lim_{\infty} u$  ou  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

## 6 Théorèmes d'existence de limites

### 6.a Théorèmes opératoires

### 6.b Théorèmes utilisant des inégalités

**Théorème** (Théorème de convergence par encadrement).

Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  suites réelles. Soit  $l \in \mathbb{R}$ .

On suppose que

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n$
- $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$  et  $w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$

Alors  $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$

**Théorème.**

Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des suites réelles.

- Si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq v_n$  et  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  alors  $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$   
(théorème de divergence par minoration)
- Si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq v_n$  et  $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$  alors  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$   
(théorème de divergence par majoration)

**Théorème** (Théorème de convergence par majoration de la distance).

Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des suites réelles. Soit  $l \in \mathbb{R}$ .

On suppose que :

- $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - l| \leq v_n$
- $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Alors  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$ .

**Proposition.**

Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des suites réelles.

On suppose que  $u$  converge vers 0 et  $v$  est bornée . Alors  $uv$  converge vers 0.

**Proposition.**

- Soit  $a \in ]1, +\infty[$ .  $a^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$
- Soit  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $|a| < 1$ .  $a^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

### 6.c Théorème de la limite monotone

**Théorème.**

Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite croissante.

Premier cas :  $u$  est majorée. Alors  $u$  converge vers un réel  $l$  et  $l = \sup\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$

Second cas :  $u$  n'est pas majorée. Alors  $u$  diverge vers  $+\infty$ .

*Démonstration.*

Premier cas :  $u$  est majorée. Posons  $l = \sup(\{u_n | n \in \mathbb{N}\})$ .

Soit  $\epsilon > 0$ . D'après la caractérisation de la borne supérieure, il existe  $N$  tel que  $l - \epsilon < u_N$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq N \Rightarrow l - \epsilon < u_N \leq u_n \leq l \Rightarrow l - \epsilon < u_n \leq l \Rightarrow |u_n - l| \leq \epsilon$ .

Donc  $u$  converge vers  $l$ .

Second cas :  $u$  n'est pas majorée.

Soit  $A \in \mathbb{R}$ .

$u$  n'est pas majorée donc  $A$  n'est pas majorant de  $u$  donc il existe  $N$  tel que  $u_N > A$ .

Pour tout  $n \geq N$ ,  $n \geq N \Rightarrow u_n \geq u_N > A \Rightarrow u_n \geq A$ . Donc  $u$  diverge vers  $+\infty$ .

□

### **Théorème.**

Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite décroissante.

Premier cas :  $u$  est minorée. Alors  $u$  converge vers un réel  $l$  et  $l = \inf\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$

Second cas :  $u$  n'est pas minorée. Alors  $u$  diverge vers  $-\infty$ .

## 6.d Suites adjacentes

### **Définition.**

Deux suites réelles  $u = (u_n)$  et  $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont dites adjacentes ssi :

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq v_n$ .
- $u$  est croissante et  $v$  est décroissante.
- $u$  et  $v$  convergent vers un même réel  $l$

### **Proposition.**

Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles. On suppose que  $u$  est croissante,  $v$  est décroissante et  $v - u$  converge vers 0. Alors  $u$  et  $v$  sont adjacentes.

## 6.e Suites extraites

### **Définition.**

On appelle suite extraite d'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  toute suite de la forme  $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  où  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est strictement croissante.

### **Propriété.**

Si une suite admet une limite, alors toutes ses suites extraites admettent la même limite.

### **Proposition.**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle.

On suppose que  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  admettent une même limite  $L$ .

Alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet  $L$  pour limite.

## 7 Passage à la limite dans les inégalités larges

### Proposition.

Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle et  $a \in \mathbb{R}$ .

- Si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq a$  et  $u$  converge vers  $l$  alors  $l \leq a$ .
- Si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq a$  et  $u$  converge vers  $l$  alors  $l \geq a$ .

### Corollaire.

Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des suites réelles.

On suppose que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq v_n$  et  $u$  et  $v$  convergent vers  $l_1$  et  $l_2$ . Alors  $l_1 \leq l_2$ .

## 8 Suites récurrentes

### 8.a Problème d'existence d'une suite récurrente, intervalle stable

#### Définition.

Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . On appelle intervalle stable par  $f$  tout intervalle  $I$  inclus dans  $D$  tel que  $f(I) \subset I$ , i.e. pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \in I$ .

### 8.b Monotonie d'une suite récurrente

### 8.c Limite d'une suite récurrente, point fixe

#### Définition.

Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . On appelle point fixe de  $f$  tout élément  $\alpha$  de  $D$  tel que  $f(\alpha) = \alpha$ .

## 9 Suites complexes

#### Définition.

Soit  $z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite complexe. On dit que  $z$  converge vers un complexe  $l$  ssi :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |z_n - l| \leq \epsilon$$

On dit que  $z$  diverge ssi  $z$  ne converge pas.

#### Proposition.

Soit  $q \in \mathbb{C}$  tel que  $|q| < 1$ .  $q^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

#### Proposition.

Soit  $z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite complexe. Soit  $l = l_1 + il_2 \in \mathbb{C}$ .

On note  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les suites partie réelle et imaginaire de  $z$   
 $z$  converge vers  $l \Leftrightarrow x$  converge vers  $l_1$  et  $y$  converge vers  $l_2$