

Résumé du chapitre 18: comparaisons de fonctions et de suites

Table des matières

1	Comparaisons de fonctions	1
1.a	Définition	1
1.b	Exemples usuels	1
1.c	Propriétés de o et O	2
1.d	Lien entre o et $\sim$	2
1.e	Propriétés de $\sim$	2
1.f	Calcul d'équivalents : pièges à éviter et méthodes	3
1.g	Application des équivalents au calcul de limite et à l'étude de signe	3
2	Comparaisons de suites	3
2.a	Définition	3
2.b	Propriétés de o et O	3
2.c	Lien entre o et $\sim$	3
2.d	Propriétés de $\sim$	3
2.e	Calculs d'équivalents : pièges à éviter et méthodes	3
2.f	Application des équivalents au calcul de limite et à l'étude de signe	3

1 Comparaisons de fonctions

1.a Définition

Proposition.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \bar{I}$.

On suppose que pour tout x dans un voisinage de a distinct de a , $g(x) \neq 0$ et, dans le cas $a \in I$ et $g(a) = 0$, $f(a) = 0$.

$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x)) \Leftrightarrow x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ est bornée sur un voisinage de a

$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x)) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \rightarrow a}{\rightarrow} 0$

$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \rightarrow a}{\rightarrow} 1$

1.b Exemples usuels

Proposition.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha < \beta$. $x^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\beta)$ et $x^\beta \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^\alpha)$.

Soit $(a, b) \in]0, +\infty[^2$ tel que $a < b$. $a^x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(b^x)$.

Proposition.

Soit $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. $x^\beta \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{\alpha x})$ et $\ln(x)^\beta \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\alpha)$.

Proposition (Equivalents usuels).

$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, $\text{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$,
 $\exp(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, $\ln(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x - 1$, $\ln(1 + h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} h$
 Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. $x^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \alpha(x - 1)$, $(1 + h)^\alpha - 1 \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \alpha h$
 $\text{ch}(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}x^2$, $\cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{2}x^2$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x)}{x} &= \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \sin'(0) = \cos(0) = 1 \text{ donc } \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \\ \frac{\tan(x)}{x} &= \frac{\tan(x) - \tan(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \tan'(0) = 1 + \tan^2(0) = 1 \text{ donc } \tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \\ \frac{\text{sh}(x)}{x} &= \frac{\text{sh}(x) - \text{sh}(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \text{sh}'(0) = \text{ch}(0) = 1 \text{ donc } \text{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \\ \frac{\exp(x) - 1}{x} &= \frac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \exp'(0) = \exp(0) = 1 \text{ donc } \exp(x) - 1 \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x \\ \frac{\ln(x)}{x - 1} &= \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x - 1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \ln'(1) = \frac{1}{1} \text{ donc } \ln(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x - 1 \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $x = h + 1$ et $h = x - 1$, $\ln(1 + h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} h$

$f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^\alpha$ est dérivable et pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$

$$\frac{x^\alpha - 1}{x - 1} = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} f'(1) = \alpha \text{ donc } \frac{x^\alpha - 1}{x - 1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \alpha \text{ donc } x^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \alpha(x - 1)$$

En effectuant le changement de variable $x = h + 1$ et $h = x - 1$, $(1 + h)^\alpha - 1 \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \alpha h$

$\text{ch}(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}x^2$ et $\cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{2}x^2$ sont admis pour le moment.

□

1.c Propriétés de o et O **1.d Lien entre o et $\sim$** **Proposition.**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \bar{I}$. $f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow f - g \underset{a}{=} o(g)$.

Autrement dit, $f \underset{a}{\sim} g$ ssi $f = g + h$ avec $h \underset{a}{=} o(g)$.

1.e Propriétés de $\sim$ **Proposition.**

Soit $a \in \bar{I}$.

- Pour tout $(f_1, f_2, g_1, g_2) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^4$, si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ alors $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$.
- Pour tout $(f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^2$, si $f \underset{a}{\sim} g$ et f et g ne s'annulent pas alors $\frac{1}{f} \underset{a}{\sim} \frac{1}{g}$.
- Pour tout $(f_1, f_2, g_1, g_2) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^4$, si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ et f_2 et g_2 ne s'annulent pas alors $\frac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \frac{g_1}{g_2}$.

Proposition.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \bar{I}$. On suppose que $f \underset{a}{\sim} g$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n \underset{a}{\sim} g^n$.
- Si f et g ne s'annulent pas, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $f^k \underset{a}{\sim} g^k$.
- Si f et g sont à valeurs strictement positives, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$.

Proposition.

Soit $a \in \bar{I}$.

- $\forall f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}), f \underset{a}{\sim} f$ (reflexivité)
- $\forall (f, g, h) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^3, f \underset{a}{\sim} g \text{ et } g \underset{a}{\sim} h \Rightarrow f \underset{a}{\sim} h$ (transitivité)
- $\forall (f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^2, f \underset{a}{\sim} g \Rightarrow g \underset{a}{\sim} f$ (symétrie)

1.f Calcul d'équivalents : pièges à éviter et méthodes**1.g Application des équivalents au calcul de limite et à l'étude de signe****Proposition.**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \bar{I}$. On suppose $f \underset{a}{\sim} g$ et g admet une limite en a . Alors f admet en a la même limite que g .

Proposition.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \bar{I}$. On suppose $f \underset{a}{\sim} g$.

Alors pour tout x dans un voisinage de a , $f(x)$ a même signe que $g(x)$.

2 Comparaisons de suites**2.a Définition****Proposition.**

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites réelles.

On suppose qu'à partir d'un certain rang v ne s'annule pas.

$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n) \Leftrightarrow$ la suite $(\frac{u_n}{v_n})_n$ est bornée

$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n) \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0.$

$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1.$

2.b Propriétés de o et O

2.c Lien entre o et $\sim$

2.d Propriétés de $\sim$

2.e Calculs d'équivalents : pièges à éviter et méthodes

2.f Application des équivalents au calcul de limite et à l'étude de signe

Proposition.

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites réelles.

On suppose que $u \sim v$ et v admet une limite. Alors u admet la même limite que v .

Proposition.

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites réelles. On suppose que $u \sim v$.

Alors pour tout n à partir d'un certain rang, u_n a même signe que v_n .