Attention : l'équivalence $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$ est fausse en général.
Dans le cas $a \geq 0$ et $b \geq 0$, cette équivalence est vraie
et doit être justifiée par "car $a \geq 0$ et $b \geq 0$".
Par exemple :
"Soit e et f des réels strictement positifs. $\frac{2ef}{e+f} \leq \sqrt{ef} \underbrace{\Leftrightarrow}_{car\ \frac{2ef}{e+f} \geq 0\ et\ \sqrt{ef} \geq 0} (\frac{2ef}{e+f})^2 \leq (\sqrt{ef})^2$"

Attention : l'équivalence $a \leq b \Leftrightarrow \lambda a \leq \lambda b$ est fausse en général.
Dans le cas $\lambda > 0$, cette équivalence est vraie et doit être justifiée par "car $\lambda > 0$".
Par exemple :
"Soit e et f des réels strictement positifs. $\frac{4e^2f^2}{(e+f)^2} \leq ef \underbrace{\Leftrightarrow}_{car\ ef>0\ et\ (e+f)^2>0} 4ef \leq (e+f)^2$"

Attention : ne jamais oublier les quantificateurs.
Par exemple :
"Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n} - u_n = \frac{2u_nv_n-(u_n+v_n)u_n}{u_n+v_n} = \frac{u_n(v_n-u_n)}{u_n+v_n} \geq 0$ car
$u_n \geq 0$, $v_n - u_n \geq 0$ (car $u_n \leq v_n$) et $u_n + v_n \geq 0$ (car $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$). Donc u est croissante."
Autre exemple :
"Soit $n \in \mathbb{N}$.
Premier cas : $n = 0$. $u_n = a \leq b = v_n$.
Second cas : $n \neq 0$. $u_n = \frac{2u_{n-1}v_{n-1}}{u_{n-1}+v_{n-1}} \leq \sqrt{u_{n-1}v_{n-1}} = v_n$.
Dans tous les cas, $u_n \leq v_n$."

Attention : Un "Pour tout" n'est valable que dans une phrase et doit donc être répété à chaque nouvelle phrase. Pour une démonstration en plusieurs phrases, mieux vaut utiliser un "Soit".
Par exemple, ceci est correct :
"Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ et $v_n \leq v_0$ (car v décroissante) donc $u_n \leq v_0$."
Mais ceci est incorrect :
"Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$. Or $v_n \leq v_0$ (car v décroissante). Donc $u_n \leq v_0$."
Par contre ceci est correct :
"Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_n \leq v_n$. Or $v_n \leq v_0$ (car v décroissante). Donc $u_n \leq v_0$."

Attention : Ne pas confondre une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un terme de la suite u_n.
Ceci est incorrect :
"u_n est croissante", "u_n est majorée", "u_n converge"
Ceci est correct :
"u est croissante", "u est majorée", "u converge"
"$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante", "$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée", "$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge"

Attention : pour étudier la monotonie d'une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la méthode consistant à comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1 pour tout $n \in \mathbb{N}$ ne s'applique que si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
Dans ce cas, on doit justifier au préalable "Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$".

Attention à ne pas abuser du symbole "$\Leftrightarrow$"
Si on a démontré P et que l'on peut en déduire Q la rédaction suivante est correcte :
"P donc ... donc Q
La rédaction suivante est insuffisante donc incorrecte :
"$P \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow Q$"
En effet, cette dernière rédaction affirme que P et Q ont même valeur de vérité,
mais pas que Q est vraie.
La rédaction suivante est suffisante mais lourde :
"$P \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow Q$. Or P est vraie. Donc Q est vraie."
Par exemple, si on a démontré que $l = \frac{2lm}{l+m}$ et $l \neq 0$,
on peut en déduire que $m = l$ avec la rédaction suivante suivante :
"$l = \frac{2lm}{l+m}$. Or $l \neq 0$. Donc $1 = \frac{2m}{l+m}$ donc $2m = l + m$ donc $l = m$."
Mais la rédaction suivante est incorrecte car insuffisante :

$$"l = \frac{2lm}{l+m} \underbrace{\Leftrightarrow}_{l \neq 0} 1 = \frac{2m}{l+m} \Leftrightarrow 2m = l + m \Leftrightarrow m = l"$$

La rédaction suivante est suffisante mais lourde :

"$l = \frac{2lm}{l+m} \underbrace{\Leftrightarrow}_{l \neq 0} 1 = \frac{2m}{l+m} \Leftrightarrow 2m = l + m \Leftrightarrow m = l$". Or $l = \frac{2lm}{l+m}$ est vraie. Donc $m = l$ est vraie."

Attention : l'implication $\lambda a = \lambda b \Rightarrow a = b$" est fausse en général.
Dans le cas $\lambda \neq 0$, cette implication est vraie donc, en supposant que $\lambda a = \lambda b$,
on peut en déduire que $a = b$, mais on doit le justifier par "car $\lambda \neq 0$".
Par exemple :
"$l = \frac{2lm}{l+m}$. Donc $1 = \frac{2m}{l+m}$ car $\lambda \neq 0$."