

Résumé du chapitre 32: espaces vectoriels de dimension finie

Table des matières

1	Définition	1
2	Algorithme d'obtention d'une base	1
3	Dimension	2
3.a	Définition	2
3.b	Exemples	2
4	Familles libres, familles génératrices et bases	3
5	Sous-espace vectoriel (sev)	3
6	Rang d'une famille finie de vecteurs	3
7	Sevs engendrant l'ev, sevs en somme directe, sevs supplémentaires	4

1 Définition

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev.

On dit que E est de dimension finie ssi E admet au moins une famille génératrice (finie).

2 Algorithme d'obtention d'une base

Proposition (augmentation d'une famille libre).

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $x_1, \dots, x_n, x$ des vecteurs de E . Supposons que $(x_1, \dots, x_n)$ libre et x n'est pas cl de $x_1, \dots, x_n$. Alors $(x_1, \dots, x_n, x)$ est libre.

Proposition (réduction d'une famille génératrice ou d'un Vect).

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $x_1, \dots, x_n, x$ des vecteurs de E . Supposons $(x_1, \dots, x_n, x)$ génératrice de E (i.e $E = Vect(x_1, \dots, x_n, x)$) et x cl de $x_1, \dots, x_n$. Alors $(x_1, \dots, x_n)$ est génératrice de E (i.e $E = Vect(x_1, \dots, x_n)$).

Théorème (de la base extraite).

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie.

De toute famille génératrice de E on peut extraire une base de E .

Corollaire.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie. E admet au moins une base.

Théorème (de la base incomplète).

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie.
Toute famille libre peut être complétée en une base de E
(en utilisant des vecteurs d'une famille génératrice de E).

3 Dimension

3.a Définition

Théorème (de la dimension).

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie. Toutes les bases de E ont le même cardinal.

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie. On appelle dimension de E et on note $\dim(E)$ le cardinal commun à toutes les bases de E .

3.b Exemples

Proposition.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, \dots, 0, 1)$.
 $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$, appelée la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
Les coordonnées d'un n -uplet $x \in \mathbb{K}^n$ dans la base $\mathcal{B}$ sont les composantes de x .
 $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie et $\dim(\mathbb{K}^n) = n$.

Proposition.

Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Pour tout $(i, j) \in [[1, n]] \times [[1, p]]$, on note $E_{i,j}$ la matrice de taille (n, p) dont tous les coefficients sont nuls, sauf le coefficient d'indice (i, j) qui vaut 1.
 $\mathcal{B} = (E_{i,j})_{(i,j) \in [[1, n]] \times [[1, p]]}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, appelée la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Les coordonnées d'une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dans la base $\mathcal{B}$ sont les coefficients de M .
 $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension finie et $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = n \times p$.

Proposition.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère $\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg(P) \leq n\}$.
 $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, appelée la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.
Les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans la base $\mathcal{B}$ sont les coefficients de P .
 $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension finie et $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$.

4 Familles libres, familles génératrices et bases

Proposition.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dim finie. Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E .

Si $\mathcal{F}$ est libre alors $\text{Card}(\mathcal{F}) \leq \dim(E)$.

Si $\mathcal{F}$ est génératrice de E alors $\text{Card}(\mathcal{F}) \geq \dim(E)$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) $\mathcal{F}$ est une base de E .
- ii) $\mathcal{F}$ est libre et $\text{Card}(\mathcal{F}) = \dim(E)$
- iii) $\mathcal{F}$ est génératrice de E et $\text{Card}(\mathcal{F}) = \dim(E)$

5 Sous-espace vectoriel (sev)

Proposition.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie. Soit F un sev de E .

F est de dimension finie. $\dim(F) \leq \dim(E)$. $\dim(F) = \dim(E) \Rightarrow F = E$.

Corollaire.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev. Soit F et G des sev de E . On suppose F et G de dimension finie.

$F = G \Leftrightarrow F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$

6 Rang d'une famille finie de vecteurs

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev. Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille finie de vecteurs de E .

On appelle rang de $\mathcal{F}$ l'entier $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\text{Vect}(x_1, \dots, x_n))$.

Proposition.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev. Soit $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs de E .

$\text{rg}(\mathcal{F}) \leq \text{Card}(\mathcal{F})$ et $\text{rg}(\mathcal{F}) = \text{Card}(\mathcal{F}) \Leftrightarrow \mathcal{F}$ est libre

Proposition.

Le rang d'une famille finie de vecteurs est invariant par opération élémentaire.

7 Sevs engendrant l'ev, sevs en somme directe, sevs supplémentaires

Proposition.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev. Soit F et G des sevs de E .

Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une base de F et $(g_1, \dots, g_m)$ une base de G .

$F \cap G = \{0_E\} \Leftrightarrow (f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m)$ est libre

$(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m)$ est génératrice de $F + G$

$F + G = E \Leftrightarrow (f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m)$ est génératrice de E

$E = F \oplus G \Leftrightarrow (f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m)$ est une base de E . Dans ce cas, on dit que $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m)$ est une base de E adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$.

Proposition.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev. Soit F et G des sevs de E .

On suppose que F et G sont de dimension finie et $E = F \oplus G$.

Alors E est de dimension finie et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

Démonstration. F est de dimension finie donc admet un moins une base $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$. G est de dimension finie donc admet au moins une base $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_m)$. $\mathcal{H} = (f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m)$ est une base de E (dite adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$). Donc E est de dimension finie et $\dim(E) = \text{Card}(\mathcal{H}) = n + m = \text{Card}(\mathcal{F}) + \text{Card}(\mathcal{G}) = \dim(F) + \dim(G)$. $\square$

Proposition.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie. Soit F et G des sevs de E .

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) $E = F \oplus G$
- ii) $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$
- iii) $F + G = E$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev. Soit F un sev de E .

On appelle sev supplémentaire de F dans E tout sev G de E tel que $F \oplus G = E$.

Proposition.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie. Soit F un sev de E .

Alors F admet au moins un supplémentaire G dans E . $\dim(G) = \dim(E) - \dim(F)$.

Démonstration. Choisissons $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F . $\mathcal{F}$ est une famille de vecteurs de F libre et $\mathcal{F}$ est génératrice de F i.e. $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. $\mathcal{F}$ est une famille de vecteurs de E libre donc, d'après le théorème de la base incomplète, $\mathcal{F}$ peut être complétée en une base de E $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$. Posons $G = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$. Alors $E = F \oplus G$. G est un supplémentaire de F dans E . $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ donc $\dim(G) = \dim(E) - \dim(F)$. $\square$

Proposition (formule de Grassmann).

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev. Soit F et G des sevs de E . On suppose F et G de dimension finie. Alors $F + G$ est de dimension finie et $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.