

Attention : les notations " $\forall$ " et " $\exists$ " peuvent être utilisées dans une formule mathématique, mais ne doivent pas être utilisées dans un texte mathématique en guise d'abréviations. Dans un texte mathématique il faut écrire "pour tout" et "il existe".

Attention à ne jamais oublier les quantificateurs.

Pour montrer une implication $P \Rightarrow Q$, on peut rédiger : "Supposons P . Alors .. donc .. donc Q ".

Pour montrer une équivalence $P \Leftrightarrow Q$, on peut rédiger : " $P \Leftrightarrow .. \Leftrightarrow .. \Leftrightarrow Q$ ".

Attention, il est incorrect de mélanger ces deux modes de rédaction :

"On suppose $P.. \Leftrightarrow .. \Leftrightarrow .. \Leftrightarrow Q$ " est incorrect.

Attention : il faut savoir utiliser l'unicité d'un DL : si une fonction admet deux DL d'ordre n en a alors, par unicité du DL, on peut identifier les coefficients des deux DL.

Par exemple :

Pour tout $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + (\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3)x + (-\frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{3}{2}\lambda_2 + 2\lambda_3)x^2 + o(x^2).$$

Montrons que $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. On suppose que $\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2 + \lambda_3 \cdot f_3 = \tilde{0}$. Pour tout $x \in]-\frac{1}{2}, +\infty[$, $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) = 0$ donc $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 0 + o(x^2)$.

$$\text{Par unicité d'un DL} \quad \begin{cases} \lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 & +2\lambda_3 & = 0 \quad \dots \\ -\frac{1}{2}\lambda_1 & +\frac{3}{2}\lambda_2 & +2\lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

Pour montrer que F est un sev, si F est égal à un ensemble de combinaisons linéaires $Vect(..., ..., ...)$, il vaut mieux montrer que $F = Vect(..., ..., ...)$ puis en déduire que F est un sev, plutôt que d'utiliser le raccourci de la définition pour montrer que F est un sev, car la première méthode est plus rapide.

Avant d'affirmer que $Vect(x_1, ..., x_n)$ est un sev de E ,

il faut justifier que $x_1 \in E, ..., x_n \in E$ si cela n'est pas évident.

Par exemple :

G l'ensemble des fonctions de la forme $\begin{cases}]0, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda \ln(x) + \mu e^x \end{cases}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Définissons $a :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ et $b :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par $a(x) = \ln(x)$ et $b(x) = e^x$

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. L'application $\begin{cases}]0, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda \ln(x) + \mu e^x \end{cases}$ est égale à $\lambda a + \mu b$.

$G = \{\lambda a + \mu b | (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\} = Vect(a, b)$ donc G est un sev de $\mathcal{D}(]0, +\infty[, \mathbb{R})$

car $(a, b) \in \mathcal{D}(]0, +\infty[, \mathbb{R})^2$.