

# Résumé du chapitre 38: déterminant

## Table des matières

|          |                                                                                                               |          |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>Application linéaire selon chaque variable, alternée, antisymétrique</b>                                   | <b>1</b> |
| <b>2</b> | <b>Définition du déterminant d'une matrice carrée</b>                                                         | <b>2</b> |
| <b>3</b> | <b>Déterminant d'une famille de <math>n</math> vecteurs dans une base d'un ev de dimension <math>n</math></b> | <b>2</b> |
| 3.a      | Définition . . . . .                                                                                          | 2        |
| 3.b      | Propriétés . . . . .                                                                                          | 3        |
| <b>4</b> | <b>Déterminant d'un endomorphisme d'un ev de dimension finie</b>                                              | <b>3</b> |
| 4.a      | Définition . . . . .                                                                                          | 3        |
| 4.b      | Propriétés . . . . .                                                                                          | 3        |
| <b>5</b> | <b>Propriétés du déterminant d'une matrice carrée</b>                                                         | <b>3</b> |
| 5.a      | Propriétés sur les colonnes . . . . .                                                                         | 3        |
| 5.b      | Propriétés algébriques . . . . .                                                                              | 4        |
| 5.c      | Propriétés sur les lignes . . . . .                                                                           | 4        |
| 5.d      | Formules de développement . . . . .                                                                           | 4        |

## 1 Application linéaire selon chaque variable, alternée, antisymétrique

### Définition.

Soit  $f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$ .

Soit  $i \in [[1, n]]$ . On dit que  $f$  est linéaire selon la  $i$ -ième variable ssi :

$\forall (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in E^{n-1}$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (x_i, x'_i) \in E^2, \\ f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + x'_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_{i-1}, x'_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x_i \in E, \\ f(x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda \cdot x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = \lambda f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{array} \right.$$

On dit que  $f$  est alternée ssi :

pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ ,

si deux des vecteurs  $x_1, \dots, x_n$  sont égaux alors  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$

On dit que  $f$  est antisymétrique ssi :

pour tout  $(i, j) \in [[1, n]]^2$  tel que  $i < j$  et pour tout  $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \in E^n$ ,  
 $f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)$

## 2 Définition du déterminant d'une matrice carrée

### Définition.

A toute matrice carrée  $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$  on associe un scalaire  $\det(A)$  aussi noté

$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$  défini par une formule dépendant des coefficients.

Cas  $n=2$  :

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{vmatrix} = \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1$$

Cas  $n=3$  :

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix} = \lambda_1 \mu_2 \nu_3 + \lambda_2 \mu_3 \nu_1 + \lambda_3 \mu_1 \nu_2 - \lambda_3 \mu_2 \nu_1 - \lambda_1 \mu_3 \nu_2 - \lambda_2 \mu_1 \nu_3$$

(règle de Sarrus)

## 3 Déterminant d'une famille de $n$ vecteurs dans une base d'un ev de dimension $n$

### 3.a Définition

#### Définition-Propriété.

On pose  $n = \dim(E)$ . Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Il existe une unique application  $\det_{\mathcal{B}} : E^n \rightarrow \mathbb{K}$  linéaire selon chaque variable et alternée telle que  $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$ .

#### Proposition.

On pose  $n = \dim(E)$ . Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Soit  $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$  une famille de vecteurs de  $E$ . Alors  $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n))$ .

#### Proposition.

On pose  $n = \dim(E)$ . Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Soit  $f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$  linéaire selon chaque variable et alternée. Alors il existe un unique  $C \in \mathbb{K}$  tel que  $f = C \cdot \det_{\mathcal{B}}$ , qui est  $C = f(e_1, \dots, e_n)$ .

### 3.b Propriétés

#### Proposition.

On pose  $n = \dim(E)$ . Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Soit  $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$  une famille de vecteurs de  $E$ .  $\mathcal{F}$  est une base de  $E \Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ .

## 4 Déterminant d'un endomorphisme d'un ev de dimension finie

### 4.a Définition

#### Définition-Propriété.

On pose  $n = \dim(E)$ . Soit  $f : E \rightarrow E$  un endomorphisme. Il existe un unique scalaire  $\det(f)$  tel que pour toute base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  et toute famille  $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$  de vecteurs de  $E$ ,  $\det_{\mathcal{B}}(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \det(f) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ .

#### Proposition.

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ .  $\det(f) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ .

### 4.b Propriétés

#### Proposition.

- Pour tout  $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ ,  $\det(g \circ f) = \det(g) \times \det(f)$ .
- $\det(\text{Id}_E) = 1$
- Pour tout  $f \in \mathcal{L}(E)$ ,  $f$  bijectif  $\Leftrightarrow \det(f) \neq 0$

## 5 Propriétés du déterminant d'une matrice carrée

### 5.a Propriétés sur les colonnes

#### Proposition.

Effectuer une dilatation de rapport  $\lambda$  sur une colonne d'une matrice multiplie le déterminant par  $\lambda$ .  
Effectuer une transvection sur les colonnes d'une matrice ne modifie le déterminant.  
Effectuer une transposition sur les colonnes d'une matrice multiplie le déterminant par  $-1$ .

#### Proposition.

Le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure est le produit de ses coefficients diagonaux.

## 5.b Propriétés algébriques

### Proposition.

- Pour tout  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ ,  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ .
- $\det(I_n) = 1$
- Pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $A$  est inversible  $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

### Proposition.

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .  $\det(A^\top) = \det(A)$ .

## 5.c Propriétés sur les lignes

### Proposition.

Effectuer une dilatation de rapport  $\lambda$  sur une ligne d'une matrice multiplie le déterminant par  $\lambda$ .  
Effectuer une transvection sur les lignes d'une matrice ne modifie le déterminant.  
Effectuer une transposition sur les lignes d'une matrice multiplie le déterminant par  $-1$ .

### Proposition.

Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est le produit de ses coefficients diagonaux.

## 5.d Formules de développement

### Proposition.

Soit  $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [[1,n]]^2}$  une matrice carrée de taille  $n$ .  
Pour tout  $(i, j) \in [[1, n]]^2$ , on note  $\Delta_{i,j}$  le déterminant de la matrice carrée de taille  $n-1$  obtenue en supprimant la  $i^{\text{ème}}$  ligne et la  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $A$  ( $\Delta_{i,j}$  est appelé le mineur d'indice  $(i, j)$  de  $A$ ).

Soit  $j \in [[1, n]]$ .  $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$ .

(formule de développement du déterminant de  $A$  par rapport à la  $j$ -ième colonne)

Soit  $i \in [[1, n]]$ .  $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$ .

(formule de développement du déterminant de  $A$  par rapport à la  $i$ -ième ligne)