

Résumé du chapitre 40: espaces probabilisés finis

Table des matières

1	Epreuve aléatoire et univers	1
2	Evènements	1
2.a	Définition	1
2.b	Opérations	1
2.c	Système complet	1
3	Mesure de probabilité	2
3.a	Définition	2
3.b	Une mesure de probabilité est uniquement déterminée par les probabilités des évènements élémentaires.	2
3.c	Propriétés	2
4	Probabilités conditionnelles	3
5	Formules	4
5.a	Formule des probabilités totales	4
5.b	Formule de Bayes	4
5.c	Formule des probabilités composées	4
6	Evènements indépendants	5

1 Epreuve aléatoire et univers

Définition.

On appelle univers l'ensemble Ω des résultats possibles d'une épreuve aléatoire.

2 Evènements

2.a Définition

Définition.

On appelle évènement toute partie A de Ω . L'ensemble des évènements est donc $\mathcal{P}(\Omega)$.

On appelle évènement impossible l'évènement $\emptyset$.

On appelle évènement certain l'évènement Ω .

On appelle évènement élémentaire tout singleton $\{\omega\}$ où $\omega \in \Omega$.

2.b Opérations

Définition.

Soit A un évènement.

On appelle évènement contraire de A l'évènement $\bar{A} = \complement_{\Omega} A$.

Soit A et B deux évènements.

On appelle évènement " A ou B " l'évènement $A \cup B$.

On appelle évènement " A et B " l'évènement $A \cap B$.

A et B sont dits incompatibles ssi A et B sont disjoints i.e. $A \cap B = \emptyset$.

2.c Système complet

Définition.

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie d'évènements.

On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'évènements ssi $(A_i)_{i \in I}$ est une partition de Ω i.e. $\forall \omega \in \Omega, \exists ! i \in I, \omega \in A_i$ (quel que soit le résultat de l'épreuve aléatoire, un et un seul des évènements $A_i, i \in I$ va se produire).

Proposition.

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie d'évènements.

$(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'évènements

$\Leftrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$ et les évènements $A_i, i \in I$ sont deux à deux incompatibles

(i.e. $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$)

3 Mesure de probabilité

3.a Définition

Définition.

On appelle mesure de probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$ toute application $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ telle que :

- $P(\emptyset) = 0$
- Si A et B sont deux évènements incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- $P(\Omega) = 1$

3.b Une mesure de probabilité est uniquement déterminée par les probabilités des évènements élémentaires.

Proposition.

Soit P une mesure de probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$.

Pour tout évènement A , $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$. $\sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = 1$.

Proposition.

Soit $(u_\omega)_{\omega \in \Omega}$ une famille de réels positifs tels que $\sum_{\omega \in \Omega} u_\omega = 1$. Alors il existe une unique mesure de probabilité P sur $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que pour tout $\omega \in \Omega$, $P(\{\omega\}) = u_\omega$.

Proposition.

Il existe une unique mesure de probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$ pour laquelle les évènements élémentaires sont équiprobables. Pour cette mesure, la probabilité commune aux évènements élémentaires est $\frac{1}{\text{Card}(\Omega)}$ et la probabilité d'un évènement A est $\frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$ (quotient du nombre de résultats favorables à A divisé par le nombre de résultats possibles).

3.c Propriétés**Proposition.**

Soit A un évènement. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Démonstration. $\Omega = A \cup \bar{A}$ et A et $\bar{A}$ sont incompatibles (i.e. $A \cap \bar{A} = \emptyset$) donc $P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$. Or $P(\Omega) = 1$. Donc $P(A) + P(\bar{A}) = 1$. Donc $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. □

Proposition.

Soit A et B des évènements tels que $A \subset B$. Alors $P(A) \leq P(B)$. (croissance)
De plus $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

Proposition.

Soit A et B des évènements. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Proposition.

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie d'évènements. On suppose les évènements $A_i, i \in I$ deux à deux incompatibles (i.e. $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$). Alors $P(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$.

Proposition.

Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'évènements. Alors $\sum_{i \in I} P(A_i) = 1$.

Démonstration. $\Omega = \bigcup_{i \in I} A_i$ et les $A_i, i \in I$ sont deux à deux incompatibles donc

$$P(\Omega) = P(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i). \text{ Or } P(\Omega) = 1. \text{ Donc } \sum_{i \in I} P(A_i) = 1.$$

□

4 Probabilités conditionnelles

Définition-Propriété.

Soit A et B deux évènements. On suppose $P(B) > 0$.

On appelle probabilité de A sachant B le quotient $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Ainsi $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$.

Proposition.

Soit B un évènement. On suppose $P(B) > 0$. L'application $P_B : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ définie par $P_B(A) = P(A|B)$ est une mesure de probabilité.

5 Formules

5.a Formule des probabilités totales

Proposition.

Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'évènements. On suppose pour tout $i \in I$, $P(A_i) > 0$.

Soit B évènement. $P(B) = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i) = \sum_{i \in I} P(B|A_i)P(A_i)$ (formule des proba totales).

Démonstration. $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'évènements donc $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$ et les $A_i, i \in I$ sont deux à deux incompatibles. $\bigcup_{i \in I} (B \cap A_i) = B \cap (\bigcup_{i \in I} A_i) = B \cap \Omega = B$ (car $B \subset \Omega$) et les $B \cap A_i, i \in I$ sont deux à deux incompatibles (car pour tout $(i, j) \in I^2$ tel que $i \neq j$, $(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = (B \cap B) \cap (A_i \cap A_j) = B \cap \emptyset = \emptyset$). Donc $P(B) = P(\bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)) = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i) = \sum_{i \in I} P(B|A_i)P(A_i)$. $\square$

Proposition.

Soit A un évènement. A et $\bar{A}$ forment un système complet d'évènements.

En particulier, d'après la formule des probabilités totales,

en supposant $P(A) > 0$ et $P(\bar{A}) > 0$, pour tout évènement B ,

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A}).$$

Démonstration. $\Omega = A \cup \bar{A}$ et A et $\bar{A}$ sont incompatibles i.e. $A \cap \bar{A} = \emptyset$. Donc A et $\bar{A}$ forment un système complet d'évènements. $\square$

5.b Formule de Bayes

Proposition.

Soit A et B deux évènements. On suppose $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$.

Alors $P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$ (formule de Bayes).

Démonstration. $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$

$\square$

5.c Formule des probabilités composées

Proposition.

Soit $A_1, \dots, A_n$ des évènements. On suppose $P(A_{n-1} \cap \dots \cap A_1) > 0$.
 $P(A_n \cap A_{n-1} \cap \dots \cap A_1) = P(A_n | A_{n-1} \cap \dots \cap A_1) P(A_{n-1} \cap \dots \cap A_1) \dots P(A_2 | A_1) P(A_1)$
(formule des probabilités composées)

Démonstration. $P(A_n \cap A_{n-1} \cap \dots \cap A_1)$
 $= P(A_n | A_{n-1} \cap \dots \cap A_1) P(A_{n-1} \cap \dots \cap A_1)$
 $= P(A_n | A_{n-1} \cap \dots \cap A_1) P(A_{n-1} | A_{n-2} \cap \dots \cap A_1) P(A_{n-2} \cap \dots \cap A_1)$
 $\dots$
 $= P(A_n | A_{n-1} \cap \dots \cap A_1) P(A_{n-1} | A_{n-2} \cap \dots \cap A_1) \dots P(A_2 | A_1) P(A_1)$

□

6 Evènements indépendants

Définition.

Deux évènements A et B sont dits indépendants ssi $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Proposition.

Soit A et B deux évènements. On suppose $P(B) > 0$.
 A et B sont indépendants $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$.

Définition.

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie d'évènements.
On dit que les évènements $A_i, i \in I$ sont mutuellement indépendants ssi pour tout ensemble d'indices J inclus dans I , $P(\bigcap_{i \in J} A_i) = \prod_{i \in J} P(A_i)$