

# Résumé du chapitre 41: variables aléatoires (va)

## Table des matières

|          |                                                                                                                 |          |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>Définition</b>                                                                                               | <b>1</b> |
| <b>2</b> | <b>Support d'une va, évènements ne dépendant que de la valeur prise par une va, loi de probabilité d'une va</b> | <b>1</b> |
| 2.a      | Support d'une va . . . . .                                                                                      | 1        |
| 2.b      | Evènements ne dépendant que de la valeur prise par une va . . . . .                                             | 1        |
| 2.c      | Loi de probabilité d'une va . . . . .                                                                           | 2        |
| <b>3</b> | <b>Va usuelles</b>                                                                                              | <b>2</b> |
| <b>4</b> | <b>Couple de va</b>                                                                                             | <b>3</b> |
| <b>5</b> | <b>Va indépendantes</b>                                                                                         | <b>4</b> |
| <b>6</b> | <b>Espérance</b>                                                                                                | <b>4</b> |
| 6.a      | Définition et théorème de transfert . . . . .                                                                   | 4        |
| 6.b      | Exemples usuels . . . . .                                                                                       | 5        |
| 6.c      | Propriétés . . . . .                                                                                            | 5        |
| <b>7</b> | <b>Variance</b>                                                                                                 | <b>6</b> |
| 7.a      | Définition et théorème de König-Huygens . . . . .                                                               | 6        |
| 7.b      | Exemples usuels . . . . .                                                                                       | 6        |
| 7.c      | Propriétés . . . . .                                                                                            | 7        |
| <b>8</b> | <b>Covariance</b>                                                                                               | <b>7</b> |
| 8.a      | Définition . . . . .                                                                                            | 7        |
| 8.b      | Propriétés . . . . .                                                                                            | 7        |

## 1 Définition

### Définition.

On appelle va toute application  $X : \Omega \rightarrow E$  où  $E$  est un ensemble.  
Si  $E = \mathbb{R}$ , on dit que la va est réelle.

## 2 Support d'une va, évènements ne dépendant que de la valeur prise par une va, loi de probabilité d'une va

### 2.a Support d'une va

#### Définition.

Soit  $X : \Omega \rightarrow E$  une va. On appelle support de  $X$  l'ensemble  $X(\Omega) = \{X(\omega) | \omega \in \Omega\}$  ( $X(\Omega)$  est l'ensemble des valeurs que peut prendre  $X$ ).  $X(\Omega) \subset E$ .

### 2.b Évènements ne dépendant que de la valeur prise par une va

#### Définition.

Soit  $X : \Omega \rightarrow E$  une va.

Soit  $A$  une partie de  $E$ . On note  $(X \in A)$  l'évènement  $\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in A\}$  (évènement "la valeur prise par  $X$  appartient à  $A$ ").

Soit  $x \in E$ . On note  $(X = x)$  l'évènement  $\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\}$  (évènement "la valeur prise par  $X$  est égale à  $x$ ").

#### Proposition.

Soit  $X : \Omega \rightarrow E$  une va.

$(X \in \emptyset) = \emptyset$ .  $(X \in X(\Omega)) = \Omega$ .

Soit  $A$  une partie de  $E$ .  $(X \in \overline{A}) = (X \in \overline{A})$ .

Soit  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ .

$(X \in A) \cup (X \in B) = (X \in A \cup B)$ .  $(X \in A) \cap (X \in B) = (X \in A \cap B)$ .

Si  $A$  et  $B$  sont disjointes alors  $(X \in A)$  et  $(X \in B)$  sont incompatibles.

### 2.c Loi de probabilité d'une va

#### Définition-Propriété.

Soit  $X : \Omega \rightarrow E$  une va. L'application  $P_X : \mathcal{P}(X(\Omega)) \rightarrow [0, 1]$  définie par  $P_X(A) = P(X \in A)$  est une mesure de probabilité.  $P_X$  est appelée la loi probabilité de  $X$ .

#### Proposition.

Soit  $X : \Omega \rightarrow E$  une va.

$(X = x)_{x \in X(\Omega)}$  est un système complet d'évènements. En particulier,  $\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1$ .

Pour tout  $x \in E$ ,  $(X = x) \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in X(\Omega)$ .

Pour toute partie finie  $A$  de  $E$ ,  $P(X \in A) = \sum_{x \in A} P(X = x)$ .

Pour toute partie  $A$  de  $E$ ,  $(X \in A) = (X \in A \cap X(\Omega))$ .

### 3 Va usuelles

#### Définition-Propriété.

Soit  $C \in \mathbb{R}$ . On dit qu'une va  $X$  est certaine de valeur  $C$  ssi  $X$  est constante de valeur  $C$ . Dans ce cas,  $X(\Omega) = \{C\}$  et  $P(X = C) = 1$ .

#### Définition-Propriété.

Soit  $F$  un ensemble fini. On dit qu'une va  $X$  suit la loi uniforme sur  $F$  et on note  $X \sim U(F)$  ssi  $X(\Omega) = F$  et les évènements  $(X = x)$ ,  $x \in F$  sont équiprobables. Dans ce cas, pour tout  $x \in F$ ,  $P(X = x) = \frac{1}{\text{Card}(F)}$  et, pour toute partie  $A$  de  $F$ ,  $P(X \in A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(F)}$ .

#### Définition-Propriété.

Soit  $p \in ]0, 1[$ . On effectue une épreuve aléatoire menant à un succès avec la probabilité  $p$ . On note  $X$  la va prenant pour valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec.  $X(\Omega) = \{0, 1\}$ .  $P(X = 1) = p$  et  $P(X = 0) = 1 - p$ . On dit que  $X$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $p$  et on note  $X \sim \mathcal{B}(p)$ .

#### Définition-Propriété.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in ]0, 1[$ . On effectue  $n$  épreuves aléatoires indépendantes, chacune menant à un succès avec la probabilité  $p$ . On note  $X$  la va prenant pour valeur le nombre de succès obtenus.  $X(\Omega) = [0, n]$ . Pour tout  $k \in [0, n]$ ,  $P(X = k) = \binom{n}{k} (1 - p)^{n-k} p^k$ . On dit que  $X$  suit la loi binômiale de paramètres  $n$  et  $p$  et on note  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ .

### 4 Couple de va

#### Définition.

Soit  $X : \Omega \rightarrow E$  et  $Y : \Omega \rightarrow F$  deux va.

Le couple de va  $(X, Y)$  est considéré comme la va  $\begin{cases} \Omega & \rightarrow & E \times F \\ \omega & \mapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{cases}$ .

La loi conjointe du couple  $(X, Y)$  est la loi de la va ci-dessus.

Les lois marginales du couple  $(X, Y)$  sont la loi de  $X$  et la loi de  $Y$ .

#### Proposition.

Soit  $X : \Omega \rightarrow E$  et  $Y : \Omega \rightarrow F$  deux va.

$(X, Y)(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$

Pour tout  $(A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$ ,  $((X, Y) \in A \times B)$  est l'évènement  $(X \in A) \cap (Y \in B)$ .

Pour tout  $(x, y) \in E \times F$ ,  $((X, Y) = (x, y))$  est l'évènement  $(X = x) \cap (Y = y)$ .

**Proposition.**

Soit  $X : \Omega \rightarrow E$  et  $Y : \Omega \rightarrow F$  deux va.

Pour tout  $x \in X(\Omega)$ ,  $P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P((X, Y) = (x, y))$ .

Pour tout  $y \in Y(\Omega)$ ,  $P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P((X, Y) = (x, y))$ .

Les lois marginales sont déterminées par la loi conjointe.

*Démonstration.*

Soit  $x \in X(\Omega)$ .  $(Y = y)_{y \in Y(\Omega)}$  est un système complet d'évènements donc, d'après la formule des probabilités totales,  $P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P((X = x) \cap (Y = y)) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P((X, Y) = (x, y))$ .

Soit  $y \in Y(\Omega)$ .  $(X = x)_{x \in X(\Omega)}$  est un système complet d'évènements donc, d'après la formule des probabilités totales,  $P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P((X = x) \cap (Y = y)) = \sum_{x \in X(\Omega)} P((X, Y) = (x, y))$ . □

**Proposition.**

Soit  $X : \Omega \rightarrow E$  et  $Y : \Omega \rightarrow F$  deux va.

Pour tout  $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ ,  $P((X, Y) = (x, y)) = P(X = x|Y = y)P(Y = y)$ .

La loi conjointe de  $(X, Y)$  est déterminée par les lois conditionnelles de  $X$  sachant  $(Y = y)$ ,  $y \in Y(\Omega)$  et par la loi de  $Y$ .

Pour tout  $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ ,  $P((X, Y) = (x, y)) = P(Y = y|X = x)P(X = x)$ .

La loi conjointe de  $(X, Y)$  est déterminée par les lois conditionnelles de  $Y$  sachant  $(X = x)$ ,  $x \in X(\Omega)$  et par la loi de  $X$ .

*Démonstration.* Soit  $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ .

$$P((X, Y) = (x, y)) = P((X = x) \cap (Y = y)) = P(X = x|Y = y)P(Y = y).$$

$$P((X, Y) = (x, y)) = P((Y = y) \cap (X = x)) = P(Y = y|X = x)P(X = x).$$
□

## 5 Va indépendantes

**Définition.**

Soit  $X : \Omega \rightarrow E$  et  $Y : \Omega \rightarrow F$  deux va.

On dit que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes ssi pour tout  $(A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$  les évènements  $(X \in A)$  et  $(Y \in B)$  sont indépendants i.e.  $P((X, Y) \in A \times B) = P(X \in A)P(Y \in B)$ .

**Proposition.**

Soit  $X : \Omega \rightarrow E$  et  $Y : \Omega \rightarrow F$  deux va.

$X$  et  $Y$  sont indépendantes

$\Leftrightarrow$  pour tout  $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ , les évènements  $(X = x)$  et  $(Y = y)$  sont indépendants i.e.  $P((X, Y) = (x, y)) = P(X = x)P(Y = y)$

**Définition.**

Soit  $X_1 : \Omega \rightarrow E_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow E_n$  des va. On dit que les va  $X_1, \dots, X_n$  sont mutuellement indépendantes ssi pour tout  $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(E_1) \times \dots \times \mathcal{P}(E_n)$ , les évènements  $(X_1 \in A_1), \dots, (X_n \in A_n)$  sont mutuellement indépendants.

**Proposition.**

Soit  $X_1 : \Omega \rightarrow E_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow E_n$  des va.  
 Les va  $X_1, \dots, X_n$  sont mutuellement indépendantes  
 $\Leftrightarrow$  pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$ , les évènements  $(X_1 = x_1), \dots, (X_n = x_n)$  sont mutuellement indépendants.

**Proposition.**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in ]0, 1[$ .  
 Soit  $X_1, \dots, X_n$  des va mutuellement indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre  $p$ . Alors  $X_1 + \dots + X_n$  suit la loi binômiale de paramètres  $n$  et  $p$ .

## 6 Espérance

### 6.a Définition et théorème de transfert

**Définition.**

Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une va réelle.  
 On appelle espérance de  $X$  et on note  $E(X)$  le réel  $\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x)x$   
 ( $E(X)$  est la moyenne des valeurs que peut prendre  $X$  pondérée par leurs probabilités).

**Théorème** (Théorème de transfert).

Soit  $X : \Omega \rightarrow E$  une va et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors  $E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x)f(x)$ .

### 6.b Exemples usuels

**Proposition.**

Soit  $X$  une va réelle.  
 Si  $X$  est certaine de valeur  $C$  où  $C \in \mathbb{R}$ ,  $E(X) = C$ .  
 Si  $X \sim U([1, n])$  où  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $E(X) = \frac{n+1}{2}$ .  
 Si  $X \sim \mathcal{B}(p)$  où  $p \in ]0, 1[$ ,  $E(X) = p$ .  
 Si  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$  où  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in ]0, 1[$ ,  $E(X) = np$ .

*Démonstration.*

Supposons  $X$  certaine de valeur  $C$  où  $C \in \mathbb{R}$ .  
 $X(\Omega) = \{C\}$ .  $E(X) = P(X = C)C = 1 \times C = C$ .  
 Supposons  $X \sim U([1, n])$  où  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$X(\Omega) = [[1, n]]. E(X) = \sum_{k=1}^n P(X = k)k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n}k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

Supposons  $X \sim \mathcal{B}(p)$  où  $p \in ]0, 1[$ .  $X(\Omega) = \{0, 1\}$ .

$$E(X) = P(X = 0)0 + P(X = 1)1 = (1 - p)0 + p1 = p.$$

Supposons  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$  où  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in ]0, 1[$ .

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } k \in [[1, n]], \binom{n}{k} &= \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} \text{ (car } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k} \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = \\ &\frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}) \text{ donc } k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}. X(\Omega) = [[0, n]]. E(X) = \sum_{k=0}^n P(X = k)k = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} p^k = \\ &\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} p^k = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} (1-p)^{n-k} p^k = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} (1-p)^{n-k} p^k = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} p^{k-1} p = \\ &np \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} p^{k-1} \underbrace{=}_{l=k-1} np \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} (1-p)^{(n-1)-l} p^l = np((1-p) + p)^{n-1} = np1^{n-1} = \\ &np. \end{aligned}$$

□

## 6.c Propriétés

### Proposition (linéarité).

Pour tout  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  et  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ .

Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E(\lambda X) = \lambda E(X)$ .

### Proposition.

Soit  $X$  une va réelle et  $C \in \mathbb{R}$ .  $E(X + C) = E(X) + C$ .

### Proposition.

Soit  $X$  et  $Y$  des va réelles. On suppose  $X$  et  $Y$  indépendantes. Alors  $E(XY) = E(X)E(Y)$ .

### Proposition (positivité).

Soit  $X$  une va réelle. On suppose  $X$  positive. Alors  $E(X) \geq 0$ .

### Proposition (croissance).

Soit  $X$  et  $Y$  des va réelles. On suppose  $X \leq Y$ . Alors  $E(X) \leq E(Y)$ .

### Proposition (inégalité de Markov).

Soit  $X$  une va réelle positive et  $a > 0$ .  $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$ .

## 7 Variance

### 7.a Définition et théorème de König-Huygens

#### Définition.

Soit  $X$  une va réelle.

On appelle variance de  $X$  et on note  $V(X)$  le réel positif  $E((X - E(X))^2)$ .

On appelle écart type de  $X$  le réel positif  $\sqrt{V(X)}$ .

#### Théorème (théorème de König-Huygens).

Soit  $X$  une va réelle.  $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ .

### 7.b Exemples usuels

#### Proposition.

Soit  $X$  une va réelle.

Si  $X$  est certaine de valeur  $C$  où  $C \in \mathbb{R}$ ,  $V(X) = 0$ .

Si  $X \sim U([1, n])$  où  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $V(X) = \frac{(n-1)(n+1)}{12}$ .

Si  $X \sim \mathcal{B}(p)$  où  $p \in ]0, 1[$ ,  $V(X) = p(1-p)$ .

Si  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$  où  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in ]0, 1[$ ,  $V(X) = np(1-p)$ .

*Démonstration.*

Supposons  $X$  certaine de valeur  $C$  où  $C \in \mathbb{R}$ .

$V(X) = E((X - E(X))^2)$ .  $E(X) = C$  donc  $X - E(X)$  est nulle donc  $(X - E(X))^2$  est nulle donc  $E((X - E(X))^2) = 0$  donc  $V(X) = 0$ .

Supposons  $X \sim U([1, n])$  où  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2. \quad E(X) = \frac{n+1}{2}. \quad X(\Omega) = [1, n]. \quad E(X^2) = \sum_{k=1}^n P(X = k)k^2 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n}k^2 = \\ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{1}{n} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}. \quad V(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = (n+1) \left[ \frac{2n+1}{6} - \frac{n+1}{4} \right] = \\ (n+1) \frac{2(2n+1) - 3(n+1)}{12} &= (n+1) \frac{n-1}{12} = \frac{(n-1)(n+1)}{12}. \end{aligned}$$

Supposons  $X \sim \mathcal{B}(p)$  où  $p \in ]0, 1[$ .

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2. \quad E(X) = p. \quad X(\Omega) = \{0, 1\}. \quad E(X^2) = P(X = 0)0^2 + P(X = 1)1^2 = \\ (1-p) \times 0 + p \times 1 &= p. \quad V(X) = p - p^2 = p(1-p). \end{aligned}$$

Supposons  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$  où  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in ]0, 1[$ .

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2. \quad E(X) = np. \quad \text{Pour tout } k \in [2, n], \quad \binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} = \frac{n(n-1)}{k(k-1)} \binom{n-2}{k-2} \\ \text{donc } k(k-1) \binom{n}{k} &= n(n-1) \binom{n-2}{k-2}. \quad X(\Omega) = [0, n]. \quad E(X(X-1)) = \sum_{k=0}^n P(X = k)k(k-1) = \\ \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} p^k &= \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} p^k = \sum_{k=2}^n n(n-1) \binom{n-2}{k-2} (1-p)^{n-k} p^k = \\ n(n-1) \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} (1-p)^{n-k} p^k &= n(n-1) \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} (1-p)^{(n-2)-(k-2)} p^{k-2} p^2 = n(n-1) p^2 \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} (1-p)^{(n-2)-(k-2)} p^{k-2} \\ &= n(n-1) p^2 \sum_{l=0}^{n-2} \binom{n-2}{l} (1-p)^{(n-2)-l} p^l = n(n-1) p^2 ((1-p) + p)^{n-2} = n(n-1) p^2 1^{n-2} = n(n-1) p^2. \\ E(X^2) &= E(X(X-1) + X) = E(X(X-1)) + E(X). \quad V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = n(n-1) p^2 + np - (np)^2 = n^2 p^2 - np^2 + np - n^2 p^2 = np - np^2 = np(1-p). \end{aligned}$$

□

## 7.c Propriétés

### Proposition.

Soit  $X$  une va réelle et  $C \in \mathbb{R}$ .  $V(X + C) = V(X)$ .  
Soit  $X$  une va réelle et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  $V(\lambda X) = \lambda^2 V(X)$ .

### Proposition (inegalité de Bienaymé-Tchebychev).

Soit  $X$  une va réelle et  $a > 0$ .  $P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$ .

## 8 Covariance

### 8.a Définition

#### Définition.

Si  $X$  et  $Y$  sont deux va réelles,  
on appelle covariance de  $X$  et  $Y$  le réel  $Cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$ .  
En particulier, si  $X$  est une va réelle,  $Cov(X, X) = V(X)$ .

#### Proposition.

Soit  $X$  et  $Y$  deux va réelles.  $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ .

#### Définition.

Soit  $X$  et  $Y$  deux va réelles.  
On dit que  $X$  et  $Y$  sont non corrélées ssi  $Cov(X, Y) = 0$  i.e.  $E(XY) = E(X)E(Y)$ .  
En particulier, si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes alors  $X$  et  $Y$  sont non corrélées.

### 8.b Propriétés

#### Proposition.

Cov est une forme bilinéaire symétrique.

#### Proposition.

Soit  $X$  et  $Y$  deux va réelles.  $V(X + Y) = V(X) + 2Cov(X, Y) + V(Y)$ .  
En particulier,  $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$  ssi  $X$  et  $Y$  sont non corrélées.

#### Proposition.

Soit  $X_1, \dots, X_n$  des va réelles.  
Si  $X_1, \dots, X_n$  sont 2 à 2 non corrélées,  $V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n)$ .  
En particulier, si  $X_1, \dots, X_n$  sont 2 à 2 indépendantes,  $V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n)$ .