

Résumé du chapitre 42: intégration

Table des matières

1	Subdivision d'un segment. Fonction réelle en escalier sur un segment.	1
1.a	Subdivision d'un segment	1
1.b	Fonction réelle en escalier sur un segment	1
2	Propriétés	1
3	Méthodes des rectangles à droite et à gauche	3
4	Théorème fondamental de l'analyse. Intégration par parties. Changement de variables.	4
4.a	Théorème fondamental de l'analyse	4
4.b	Intégration par parties	4
4.c	Changement de variables	5
5	Intégration des fonctions complexes	5
5.a	Définition	5
5.b	Propriétés	5
5.c	Théorème fondamental de l'analyse. Intégration par parties. Changement de variables	5

1 Subdivision d'un segment. Fonction réelle en escalier sur un segment.

1.a Subdivision d'un segment

Définition.

On appelle subdivision de $[a, b]$ toute famille $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ de réels telle que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

1.b Fonction réelle en escalier sur un segment

Définition.

Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite en escalier ssi il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, f est constante sur $]x_{k-1}, x_k[$.
Une telle subdivision est dite adaptée à f .

2 Propriétés

Proposition.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

$$-\forall(a, b, c) \in I^3, \int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt \text{ (relation de Chasles)}$$

$$-\forall a \in I, \int_a^a f(t)dt = 0$$

$$-\forall(a, b) \in I^2, \int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$$

Proposition.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors $\int_a^b \lambda dt = (b - a)\lambda$.

Proposition (Linéarité).

-Pour tout $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues et $(a, b) \in I^2$,

$$\int_a^b (f(t) + g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt.$$

-Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $(a, b) \in I^2$,

$$\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt.$$

Proposition (Positivité).

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Si f est positive (i.e. pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) \geq 0$) alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.

Proposition (Croissance).

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues.

Si $f \leq g$ (i.e. pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) \leq g(t)$) alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

Proposition (inégalité triangulaire).

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors $|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt$.

Corollaire.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $C \in \mathbb{R}_+$.

On suppose que pour tout $t \in [a, b]$, $|f(t)| \leq C$. Alors $|\int_a^b f(t)dt| \leq (b-a)C$.

Démonstration. $|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt \leq \int_a^b Cdt = (b-a)C$. □

Proposition.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue positive et non nulle. Alors $\int_a^b f(t)dt > 0$.

Corollaire.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue positive telle que $\int_a^b f(t)dt = 0$. Alors f est nulle.

3 Méthodes des rectangles à droite et à gauche

Définition.

Une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ est dite régulière ssi pour tout $k \in [[1, n]]$, $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$.

Dans ce cas, pour tout $k \in [[0, n]]$, $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$.

Définition.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(a + k \frac{b-a}{n})$

et $R'_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k \frac{b-a}{n})$ (sommes de Riemann).

Proposition.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors $R_n(f) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_a^b f(t)dt$ et $R'_n(f) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_a^b f(t)dt$.

Proposition.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que f' est bornée. Alors il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\int_a^b f(t)dt - R_n(f)| \leq \frac{K}{n}$ et $|\int_a^b f(t)dt - R'_n(f)| \leq \frac{K}{n}$.

Démonstration. f' est bornée donc il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $t \in [a, b]$, $|f'(t)| \leq C$ donc, d'après l'inégalité des accroissements finis, f est C -lipschitzienne. Montrons seulement qu'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\int_a^b f(t)dt - R_n(f)| \leq \frac{K}{n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons la subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ régulière.

$$\begin{aligned} |\int_a^b f(t)dt - R_n(f)| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt - \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})f(x_k) \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^n (\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt - (x_k - x_{k-1})f(x_k)) \right| = \left| \sum_{k=1}^n (\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k)dt) \right| = \left| \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(x_k))dt \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(x_k))dt \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t) - f(x_k)|dt \quad (\text{par inégalités triangulaires}) \end{aligned}$$

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

f est C -lipschitzienne donc pour tout $t \in [x_{k-1}, x_k]$, $|f(t) - f(x_k)| \leq C|t - x_k| = -C(t - x_k)$.

$$\text{Donc } \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t) - f(x_k)|dt \leq \int_{x_{k-1}}^{x_k} -C(t - x_k)dt = \left[-\frac{C}{2}(t - x_k)^2\right]_{x_{k-1}}^{x_k} = \frac{C}{2}(x_k - x_{k-1})^2 = \frac{C(b-a)^2}{2n^2}.$$

$$\text{Donc } |\int_a^b f(t)dt - R_n(f)| \leq \sum_{k=1}^n \frac{C(b-a)^2}{2n^2} = n \frac{C(b-a)^2}{2n^2} = \frac{C(b-a)^2}{2n} = \frac{K}{n} \text{ en posant } K = \frac{C(b-a)^2}{2}.$$

□

4 Théorème fondamental de l'analyse. Intégration par parties. Changement de variables.

4.a Théorème fondamental de l'analyse

Théorème (Théorème fondamental de l'analyse).

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Soit $a \in I$.

Définissons $F_a : I \rightarrow \mathbb{R}$ par $F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Alors F_a est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

Démonstration.

Montrons l'unicité. Soit F_1 et F_2 deux primitives de f qui s'annulent en a . Montrons que $F_1 = F_2$. Il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $F_1 - F_2 = \tilde{c}$. $c = F_1(a) - F_2(a) = 0 - 0 = 0$. Donc $F_1 = F_2$.

Montrons que F_a est une primitive de f . Montrons que F_a est dérivable et $F_a' = f$. Soit $x_0 \in I$. Montrons que F_a est dérivable en x_0 et $F_a'(x_0) = f(x_0)$. Montrons que $\frac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0)$.

Soit $\epsilon > 0$. Pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$, $|\frac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)| = \frac{|F_a(x) - F_a(x_0) - (x - x_0)f(x_0)|}{|x - x_0|} =$

$$\frac{|\int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt - (x - x_0)f(x_0)|}{|x - x_0|} = \frac{|\int_{x_0}^x f(t)dt - \int_{x_0}^x f(x_0)dt|}{|x - x_0|} = \frac{|\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))dt|}{|x - x_0|}.$$

f continue en x_0 donc $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow x_0} f(x_0)$ donc il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in I \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $|f(t) - f(x_0)| \leq \epsilon$. Soit $x \in I \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Pour tout t compris entre x_0 et x , $t \in I \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ donc $|f(t) - f(x_0)| \leq \epsilon$.

Donc $|\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))dt| \leq |x - x_0|\epsilon$ donc $\frac{|\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))dt|}{|x - x_0|} \leq \epsilon$ donc $|\frac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)| \leq \epsilon$. Donc

$\frac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0)$. Donc F_a est dérivable en x_0 et $F_a'(x_0) = f(x_0)$. Donc F_a est dérivable et $F_a' = f$. Donc F_a est primitive de f .

F_a s'annule en a car $F_a(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$.

□

Corollaire.

Toute fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue admet au moins une primitive.

Proposition.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $(a, b) \in I^2$. Soit F une primitive de f .

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a). \text{ En posant } [F(t)]_a^b = F(b) - F(a), \int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b.$$

4.b Intégration par parties**Proposition** (intégration par parties (IPP)).

Soit $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $v : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et $(a, b) \in I^2$.

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

4.c Changement de variables**Proposition** (changement de variables).

Soit $\varphi : I \rightarrow J$ de classe C^1 . Soit $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Soit $(a, b) \in I^2$.

Moyen mnémotechnique : $u = \varphi(t)$ donne $du = \varphi'(t)dt$ (car $\frac{du}{dt} = \varphi'(t)$)

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Attention : il ne faut pas oublier de changer les bornes.

5 Intégration des fonctions complexes**5.a Définition****Définition.**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ continue et $(a, b) \in I^2$. On pose $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b x(t)dt + i \int_a^b y(t)dt$
où $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont les fonctions parties réelle et imaginaire de f .

5.b Propriétés**5.c Théorème fondamental de l'analyse. Intégration par parties. Changement de variables**