

Résumé du chapitre 43: séries

Table des matières

1 Définition	1
2 Séries convergentes	1
2.a Définition	1
2.b Propriétés générales	2
2.c Propriétés concernant les séries à termes positifs	3
3 Séries absolument convergentes	4
3.a Définition	4
3.b Propriétés	4

1 Définition

Définition.

Soit $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle ou complexe. La série de terme général u_n , $n \geq n_0$ est notée $\sum_{n \geq n_0} u_n$. Pour tout $n \geq n_0$, $S_n = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \dots + u_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$ est appelée la somme partielle d'indice n de la série.

2 Séries convergentes

2.a Définition

Définition.

On dit qu'une série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge ssi la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \geq n_0}$ converge.

Dans ce cas, on appelle somme de la série et on note $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ la limite de $(S_n)_{n \geq n_0}$.

On dit qu'une série diverge ssi elle ne converge pas.

On appelle nature d'une série son caractère convergent ou divergent.

Définition-Propriété.

Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ une série convergente.

Pour tout $n \geq n_0$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est appelé le reste d'indice n de la série.

Notons $(S_n)_{n \geq n_0}$ la suite de sommes partielles et S la somme de la série.

Pour tout $n \geq n_0$, $S = S_n + R_n$ (i.e. $\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n_0}^n u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$).

$(R_n)_{n \geq n_0}$ converge vers 0.

Démonstration. $R_n = S - S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S - S = 0$ □

2.b Propriétés générales

Proposition.

Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ une série. Si $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge alors $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge vers 0.

Par contraposée, si $(u_n)_{n \geq n_0}$ ne converge pas vers 0 alors $\sum_{n \geq n_0} u_n$ diverge.

Dans ce cas, on dit que la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ diverge grossièrement.

Démonstration. Supposons que $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge. Notons $(S_n)_{n \geq n_0}$ la suite des sommes partielles et

S la somme de la série. $u_n = \sum_{k=n_0}^n u_k - \sum_{k=n_0}^{n-1} u_k = S_n - S_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S - S = 0$. □

Proposition.

Soit $q \in \mathbb{C}$. On considère $\sum_{n \geq 0} q^n$ (série géométrique).

Si $|q| \geq 1$, $\sum_{n \geq 0} q^n$ diverge grossièrement.

Si $|q| < 1$, $\sum_{n \geq 0} q^n$ converge et sa somme est $\frac{1}{1-q}$.

Démonstration.

Premier cas : $|q| \geq 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|q^n| = |q|^n \geq 1$ donc $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 (car si $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 alors $(|q^n|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $|0| = 0$ donc, par passage à la limite dans les inégalités larges, $0 \geq 1$ ce qui est absurde). Donc $\sum_{n \geq 0} q^n$ diverge grossièrement.

Second cas : $|q| < 1$.

Notons $(S_n)_{n \geq 0}$ la suite des sommes partielles. Pour tout $n \geq 0$, $S_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

$S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q}$ donc $\sum_{n \geq 0} q^n$ converge et sa somme est $\frac{1}{1-q}$. □

Proposition (linéarité).

Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ des séries réelles (resp. complexes) et λ et μ des réels (resp. des complexes). On suppose que $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ convergent.

Alors $\sum_{n \geq n_0} (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et $\sum_{n \geq n_0} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n \geq n_0} u_n + \mu \sum_{n \geq n_0} v_n$.

Démonstration. Notons $(S_n)_{n \geq n_0}$ et $(T_n)_{n \geq n_0}$ les suites des sommes partielles et S et T les sommes de $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$. Pour tout $n \geq n_0$, $\sum_{k=n_0}^n (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=n_0}^n u_k + \mu \sum_{k=n_0}^n v_k = \lambda S_n + \mu T_n$. Donc $(\lambda S_n + \mu T_n)_{n \geq n_0}$ est la suite des sommes partielles de $\sum_{n \geq n_0} (\lambda u_n + \mu v_n)$. Or $(\lambda S_n + \mu T_n)_{n \geq n_0}$ converge vers $\lambda S + \mu T$ car $(S_n)_{n \geq n_0}$ converge vers S et $(T_n)_{n \geq n_0}$ converge vers T . Donc $\sum_{n \geq n_0} (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et sa somme est $\lambda S + \mu T$. $\sum_{n \geq n_0} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda S + \mu T = \lambda \sum_{n \geq n_0} u_n + \mu \sum_{n \geq n_0} v_n$. □

Proposition (passage à la limite dans les inégalités larges).

Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ des séries réelles. On suppose que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$
et $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ convergent. Alors $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$.

Proposition (télescopage).

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite. $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n \geq n_0+1} (u_n - u_{n-1})$ converge.

Dans ce cas, $\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} (u_n - u_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - u_{n_0}$.

2.c Propriétés concernant les séries à termes positifs

Proposition.

Une série à termes positifs converge ssi la suite des sommes partielles est majorée.

Démonstration. Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ une série à termes positifs (i.e. pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq 0$). On note

$(S_n)_{n \geq n_0}$ la suite des sommes partielles. Pour tout $n \geq n_0$, $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=n_0}^{n+1} u_k - \sum_{k=n_0}^n u_k = u_{n+1} \geq 0$
donc $(S_n)_{n \geq n_0}$ est croissante. Donc, d'après le théorème de la limite monotone, $(S_n)_{n \geq n_0}$ converge
ssi $(S_n)_{n \geq n_0}$ est majorée. Donc $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge ssi $(S_n)_{n \geq n_0}$ est majorée. \square

Proposition.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ (série de Riemann).

Si $\alpha \leq 1$ alors $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge (et lorsque $\alpha \leq 0$ la divergence est grossière).

Si $\alpha > 1$ alors $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

Proposition.

Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ des séries à termes positifs.

On suppose que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$.

Si $\sum_{n \geq n_0} v_n$ converge alors $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge.

Par contraposée, si $\sum_{n \geq n_0} u_n$ diverge alors $\sum_{n \geq n_0} v_n$ diverge.

Démonstration. Notons $(S_n)_{n \geq n_0}$ et $(T_n)_{n \geq n_0}$ les suites de sommes partielles de $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$.

Pour tout $n \geq n_0$, $S_n \leq T_n$ (car $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k \leq \sum_{k=n_0}^n v_k = T_n$ car pour tout $k \in [[n_0, n]]$, $u_k \leq v_k$).

Supposons que $\sum_{n \geq n_0} v_n$ converge. Alors $(T_n)_{n \geq n_0}$ converge donc est bornée donc est majorée donc il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $T_n \leq M$. Pour tout $n \geq n_0$, $S_n \leq M$ (car $S_n \leq T_n$ et $T_n \leq M$) donc $(S_n)_{n \geq n_0}$ est majorée. Or $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est à termes positifs. Donc $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge. \square

Proposition.

Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ des séries à termes positifs. On suppose que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$.
 Si $\sum_{n \geq n_0} v_n$ converge alors $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge.
 Par contraposée, si $\sum_{n \geq n_0} u_n$ diverge alors $\sum_{n \geq n_0} v_n$ diverge.

Corollaire.

Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ des séries à termes positifs. On suppose que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$.
 Si $\sum_{n \geq n_0} v_n$ converge alors $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge.
 Par contraposée, si $\sum_{n \geq n_0} u_n$ diverge alors $\sum_{n \geq n_0} v_n$ diverge.

Proposition.

Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ des séries à termes positifs. On suppose que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.
 Alors $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ sont de même nature.

3 Séries absolument convergentes

3.a Définition

Définition.

On dit qu'une série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge absolument ssi $\sum_{n \geq n_0} |u_n|$ converge.

3.b Propriétés

Proposition.

Toute série absolument convergente est convergente.

Proposition (inégalité triangulaire).

Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ une série absolument convergente. Alors $|\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|$.