

Résumé du chapitre 10: fonctions usuelles

Table des matières

1	Logarithme, exponentielle, puissances	1
1.a	Fonction $\ln$	1
1.b	Fonction $\exp$	1
1.c	Puissances	2
1.d	Fonctions puissances	3
1.e	Croissances comparées	3
2	Fonctions ch et sh	3
3	Fonctions cos, sin, tan, arccos, arcsin, arctan	4
3.a	Fonctions cos et sin	4
3.b	Fonction tan	4
3.c	Fonction arcsin	4
3.d	Fonction arccos	5
3.e	Fonction arctan	5

1 Logarithme, exponentielle, puissances

1.a Fonction $\ln$

Définition.

On appelle logarithme népérien et on note $\ln$ l'unique primitive de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1. Autrement dit :

$\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$
 $\ln(1) = 0$

Proposition.

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

$$\forall x \in]0, +\infty[, \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$$

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

Proposition.

$\ln$ est strictement croissante. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$.

1.b Fonction exp

Définition.

La réciproque de la bijection $\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est appelée exponentielle et notée $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\exp(x) > 0$.

Proposition.

$$\begin{aligned}\exp(0) &= 1 \\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exp(x + y) &= \exp(x)\exp(y) \\ \forall x \in \mathbb{R}, \exp(-x) &= \frac{1}{\exp(x)} \\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exp(x - y) &= \frac{\exp(x)}{\exp(y)}\end{aligned}$$

Proposition.

$\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ est une bijection continue strictement croissante.
En particulier, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$.
 $\exp$ est dérivable et $\exp' = \exp$.

Démonstration. $\ln$ est une bijection continue strictement croissante donc sa réciproque $\exp$ l'est également. $\ln$ est dérivable et pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x} \neq 0$. D'après le théorème de dérivabilité de la réciproque, $\exp$ est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \frac{1}{\ln'(\exp(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\exp(x)}} = \exp(x)$. □

1.c Puissances

Définition-Propriété.

Soit $x \in]0, +\infty[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$.
On a $x^\alpha > 0$ et $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$.

Proposition.

$$\begin{aligned}\text{Soit } x &\in]0, +\infty[. \\ \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, x^{\alpha+\beta} &= x^\alpha x^\beta. \\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, x^{-\alpha} &= \frac{1}{x^\alpha} \\ \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, x^{\alpha-\beta} &= \frac{x^\alpha}{x^\beta}.\end{aligned}$$

Proposition.

$$\begin{aligned}\text{Soit } \alpha &\in \mathbb{R}. \\ 1^\alpha &= 1. \\ \forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, (xy)^\alpha &= x^\alpha y^\alpha. \\ \forall x \in]0, +\infty[, \left(\frac{1}{x}\right)^\alpha &= \frac{1}{x^\alpha} \\ \forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha &= \frac{x^\alpha}{y^\alpha}\end{aligned}$$

Proposition.

Soit $x \in]0, +\infty[$.
 $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$
 $\forall n \in \mathbb{N}^*, x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

Proposition.

- Soit $a \in]1, +\infty[$. Alors $a^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.
- Soit $a \in]0, 1[$. Alors $a^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

1.d Fonctions puissances**Définition-Propriété.**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction puissance α est $f :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ définie par $f(x) = x^\alpha$.
 f est dérivable et pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
Si $\alpha > 0$, f est strictement croissante, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$.
Si $\alpha < 0$, f est strictement décroissante, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0^+$.

1.e Croissances comparées**Proposition (Croissances comparées).**

Soit $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.
— $\frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$
— $e^{\alpha x} |x|^\beta \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$
— $\frac{\ln(x)^\beta}{x^\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$
— $x^\alpha |\ln(x)|^\beta \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$

2 Fonctions ch et sh**Définition.**

On appelle cosinus hyperbolique la fonction $\text{ch} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
On appelle sinus hyperbolique la fonction $\text{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Proposition.

ch est paire et sh est impaire. $\text{ch}(0) = 1$ et $\text{sh}(0) = 0$.
 ch et sh sont dérivables. $\text{ch}' = \text{sh}$ et $\text{sh}' = \text{ch}$.

Proposition.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\text{sh}'(x)=\text{ch}(x)$	+	1	+
$\text{sh}(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\text{ch}'(x)=\text{sh}(x)$	-	0	+
$\text{ch}(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

3 Fonctions cos, sin, tan, arccos, arcsin, arctan

3.a Fonctions cos et sin

Proposition.

cos est paire et sin est impaire. cos et sin sont 2π -périodiques.
cos et sin sont dérivables. $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$.

3.b Fonction tan

Proposition.

tan est impaire. tan est π -périodique.
tan est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

Proposition.

tan est strictement croissante sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$. tan étant impaire, $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$.

3.c Fonction arcsin

Définition.

On appelle arc sinus et on note arcsin la fonction réciproque de la bijection $f : \begin{cases} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \rightarrow [-1, 1] \\ x & \mapsto \sin(x) \end{cases}$. Autrement dit, $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arcsin(x)$ est l'unique élément de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ donc le sinus vaut x .

Proposition.

arcsin est une bijection continue strictement croissante impaire.
arcsin est dérivable sur $] -1, 1[$ et pour tout $x \in] -1, 1[$, $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Démonstration. $f : \begin{cases} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \rightarrow [-1, 1] \\ x & \mapsto \sin(x) \end{cases}$ est une bijection continue strictement croissante impaire. Donc sa réciproque arcsin l'est également.

sin est dérivable sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\sin'(x) = \cos(x)$ donc $\sin'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{\pi}{2}$. $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$

(Explication détaillée $g : \begin{cases}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \rightarrow &]-1, 1[\\ x & \mapsto & \sin(x) \end{cases}$ est une bijection strictement croissante dérivable et g' ne s'annule pas. Donc $g^{-1} : \begin{cases}]-1, 1[& \rightarrow &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ x & \mapsto & \arcsin(x) \end{cases}$ est dérivable et pour tout $x \in]-1, 1[$, $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$)

Par théorème de dérivabilité de la réciproque $\arcsin$ est dérivable sur $] - 1, 1[$ et pour tout $x \in] - 1, 1[$, $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$.

Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $|\cos(y)| = \sqrt{\cos^2(y)} = \sqrt{1 - \sin^2(y)}$. Soit $x \in [-1, 1]$. En prenant $y = \arcsin(x)$, on obtient $|\cos(\arcsin(x))| = \sqrt{1 - x^2}$. Or $\cos(\arcsin(x)) \geq 0$ car $\arcsin(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Donc $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.

Ainsi pour tout $x \in] - 1, 1[$, $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

□

3.d Fonction arccos

Définition.

On appelle arc cosinus et on note $\arccos$ la fonction réciproque de la bijection $f : \begin{cases} [0, \pi] & \rightarrow & [-1, 1] \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{cases}$. Autrement dit, $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ et pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arccos(x)$ est l'unique élément de $[0, \pi]$ dont le cosinus vaut x .

Proposition.

$\arccos$ est une bijection continue strictement décroissante.

$\arccos$ est dérivable sur $] - 1, 1[$ et pour tout $x \in] - 1, 1[$, $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3.e Fonction arctan

Définition.

On appelle arc tangente et on note $\arctan$ la réciproque de la bijection $f : \begin{cases}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan(x) \end{cases}$. Autrement dit, $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan(x)$ est l'unique élément de $] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dont la tangente vaut x .

Proposition.

$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est une bijection continue strictement croissante impaire.

En particulier $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$.

$\arctan$ est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Démonstration. $f : \begin{cases}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan(x) \end{cases}$ est une bijection continue strictement croissante impaire donc sa réciproque $\arctan$ l'est aussi.

$\tan$ est dérivable sur $] \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \neq 0$.

Par théorème de dérivabilité de la réciproque, $\arctan$ est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$

□