

Résumé du chapitre 11: primitives

Table des matières

1	Définition	1
2	Propriétés	1
3	Exemples usuels	1
4	Intégration par parties (IPP)	2
5	Changement de variables	2
6	Fonctions complexes	2

1 Définition

Définition.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

On appelle primitive de f toute fonction $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $F' = f$.

2 Propriétés

Proposition.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admettant au moins une primitive F .

Alors les primitives de f sont les fonctions de la forme $F + \tilde{c}$ avec $c \in \mathbb{R}$.

Proposition.

Toute fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue admet au moins une primitive.

3 Exemples usuels

Proposition.

$$\int \exp(x) dx = \exp(x) + c^{te}$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + c^{te} \text{ et } \int \sin(x) dx = -\cos(x) + c^{te}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + c^{te} \text{ et } \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c^{te} \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + c^{te} \text{ et } \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c^{te}$$

Proposition.

$$\begin{aligned} \int \exp(f(x))f'(x)dx &= \exp(f(x)) + c^{te} \\ \int \cos(f(x))f'(x)dx &= \sin(f(x)) + c^{te} \\ \int \sin(f(x))f'(x)dx &= -\cos(f(x)) + c^{te} \\ \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx &= \ln(|f(x)|) + c^{te} \\ \int f(x)^\alpha f'(x)dx &= \frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c^{te} \quad (\alpha \neq -1) \\ \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}dx &= \arcsin(f(x)) + c^{te} \\ \int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}dx &= \arctan(f(x)) + c^{te} \end{aligned}$$

Proposition.

$$\int \tan(x)dx = -\ln(|\cos(x)|) + c^{te} \text{ sur }]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[\text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Démonstration. $\int \tan(x)dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx = -\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}dx = -\ln(|\cos(x)|) + c^{te}$
 $(f(x) = \cos(x), \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln(|f(x)|) + c^{te})$

□

4 Intégration par parties (IPP)

Proposition (IPP, version intégrale indéfinie).

Soit $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $v : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . $\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx$.

Proposition.

$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x + c^{te}$$

Démonstration. $\int \ln(x)dx = x\ln(x) - \int x \frac{1}{x}dx = x\ln(x) - \int 1dx = x\ln(x) - x + c^{te}$
 (IPP $u'(x) = 1$, $v(x) = \ln(x)$, $u(x) = x$, $v'(x) = \frac{1}{x}$)

□

5 Changement de variables

Proposition (Changement de variable, version intégrale indéfinie).

Soit $\varphi : I \rightarrow J$ de classe C^1 et $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ continue.
 Moyen-mnémotechnique : $y = \varphi(x)$ donne $dy = \varphi'(x)dx$ (car $\frac{dy}{dx} = \varphi'(x)$)
 $\int f(y)dy = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$

6 Fonctions complexes