PCSI 23/24 - Programme de colle de Mathématiques n° 29 : du 10 au 14 juin 2024

Séries

1. Séries numériques réelles et complexes. Sommes partielles, convergence, somme de la série. Séries tronquées. Linéarité. Le terme général d'une série convergente tend vers 0, divergence grossière.
   Lien suite-série : une suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.
   Une série complexe $\sum u_n$ est convergente si, et seulement si les deux séries $\sum Re(u_n)$ et $\sum Im(u_n)$ sont convergentes. Lien entre les sommes.
2. Séries à termes positifs. Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. Théorème de comparaison pour les séries à termes positifs ($\leqslant$, $\mathcal{O}$, $\sim$).
   Comparaison entre série et intégrale pour une fonction positive continue et monotone. Application à la divergence de la série harmonique.
   Développement décimal propre d'un réel positif x (sans démonstration).
3. Séries absolument convergentes, suites sommables. Une série complexe $\sum u_n$ est absolument convergente si, et seulement si les deux séries $\sum Re(u_n)$ et $\sum Im(u_n)$ sont absolument convergentes.
   Une série absolument convergente est convergente. Inégalité triangulaire pour les séries.
   Si $\sum u_n$ est une série réelle ou complexe et $\sum v_n$ une série à termes positifs, si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.
4. Séries de référence : harmonique, géométriques complexes, de Riemann, exponentielles réelles et complexes.

Dénombrement

n et p désignent des entiers naturels non nuls, E un ensemble.

1. Rappels pour deux ensembles : intersection, réunion, différence, complémentaire : définitions et propriétés, dont les lois de Morgan.

   Généralisation à une famille d'ensembles. Lois de Morgan dans ce cas. Recouvrement d'un ensemble, recouvrement disjoint, partition.
2. Ensembles finis. E est fini de cardinal n si, et seulement si, il existe une bijection de E dans $[\![1, n]\!]$. Par convention l'ensemble vide $\emptyset$ a pour cardinal 0. Notation : $Card(E)$ ou $|E|$.

   Si E et F sont des ensembles finis non vides, il n'y a pas d'application de E dans F injective (respectivement surjective, bijective) si $Card(E) > Card(F)$ (respectivement $Card(E) < Card(F)$, $Card(E) \neq Card(F)$).

   Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.

   Opérations sur les cardinaux : intersection et réunion de deux ensembles finis, formule du crible à l'ordre 2 uniquement. Cardinal du complémentaire.

   L'intersection d'une famille d'ensembles finis est un ensemble fini, de même que la réunion d'une famille finie d'ensembles finis. Cardinal de la réunion dans le cas d'une famille finie d'ensembles finis deux à deux disjoints.

   Principe multiplicatif : le produit d'un nombre fini d'ensembles finis est un ensemble fini et son cardinal est le produit de leurs cardinaux. Cas de E^n.
3. Listes finies d'éléments d'un ensemble. Nombre de p-listes d'un ensemble à n éléments.
   Pour E et F deux ensembles finis non vides, valeur de $\mathrm{Card}\big(\mathcal{F}(E, F)\big)$ et de $\mathrm{Card}\big(\mathcal{P}(E)\big)$.

   Nombre de p-listes d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments.
   Cardinal de l'ensemble des applications injectives de E dans F, nombre de permutations de E.

   Combinaisons, coefficients binomiaux, rappel des propriétés.