Parties d'un ensemble. Fonctions et applications.

- Rappels sur les symboles $\in, \notin, \subset, \not\subset$. Ecritures d'ensembles. Egalité. Opérations sur les ensembles.
- Pour deux ensembles non vides E et F , une fonction f de E dans F associe à chaque élément x de E au plus un élément y de F , noté $f(x)$ et appelé l'image de x par f , x est appelé un antécédent de y par f .
 E est l'ensemble de départ et F celui d'arrivée de f . Notation : $f : x \rightarrow f(x)$ de E dans F .
 Domaine de définition, graphe de f .
- f est appelée une application de E dans F si f associe à chaque élément x de E exactement un élément y de F .
 Le vocabulaire est le même que pour les fonctions.
 Dans le cas d'une application, l'ensemble de départ est toujours le domaine de définition. Une des écritures de cette application est : $f : E \rightarrow F$.

$$x \mapsto f(x)$$

 L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathcal{F}(E, F)$.
 Ensemble image $f(E)$. Egalité de deux applications, application composée.
- Définition d'une bijection : chaque élément de F a exactement un antécédent par f dans E .
 Définition de la réciproque d'une bijection.
 ATTENTION : Les notions d'applications injectives et surjectives seront vues plus tard dans l'année.
- Restriction et prolongement. Bijection définie (réalisée) par une application.
- Cas où $E = F$: une partie non vide A de E est stable par f si $f(A) \subset A$.
 Dans ce cas, $g : A \rightarrow f(A)$ est bien définie, on l'appelle l'application induite par f sur A .

$$x \mapsto f(x)$$

 A est globalement invariante par f si $f(A) = A$.
 L'ensemble $\text{Inv}(f)$ des points de E invariants par f est appelé l'invariant de f .

Fonctions numériques réelles.

- Partie majorée, minorée de $\mathbb{R}$. Majorant, minorant, maximum, minimum. Cas de $\mathbb{N}$.
 Une partie de $\mathbb{R}$ est bornée si elle est majorée et minorée. Caractérisation à l'aide de la valeur absolue.
- Définition d'un segment. Propriété de convexité : une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si : $\forall (a, b) \in I^2, a \leq b \Rightarrow [a, b] \subset I$. Différents types d'intervalles.
- Opérations sur les fonctions réelles, dont les combinaisons linéaires.
- Révision : définition des fonctions réelles paires, impaires, périodiques sur une partie D non vide de $\mathbb{R}$. Propriétés des courbes de ces fonctions.
 Définition des fonctions (strictement) croissantes, décroissantes, monotones.
- Si D est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une application,
 si f est strictement croissante sur D , alors $\forall (x, y) \in D^2, x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$;
 si f est strictement monotone, f définit une bijection dont la réciproque est strictement monotone de même monotonie stricte que f .
 Propriétés des sommes et composées de fonctions monotones.

Continuité et dérivabilité.

- Rappels sur les fonctions continues et dérivables, définition et propriétés. Opérations, composition.
- Pour une fonction f dérivable sur un intervalle, lien entre la monotonie de f et le signe de la dérivée de f (lien dérivée-montonie).
- Théorème des valeurs intermédiaires : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point. Soit f une application continue de I dans $\mathbb{R}$. Soit a et b dans I tels que $a < b$. Pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c dans $[a, b]$ tel que $\lambda = f(c)$.
 Corollaires.
- Théorème de la bijection (ou théorème fondamental) : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point, et f une application de I dans $\mathbb{R}$.
 Si f est continue et strictement monotone sur I , alors $f(I)$ est un intervalle et f définit une bijection de I dans $f(I)$, dont la réciproque est continue et strictement monotone sur $f(I)$, de même monotonie stricte que f .
 Les bornes ou extrémités de l'intervalle $f(I)$ s'obtiennent à l'aide de celles de I .
 NB : Le théorème de la bijection pour les fonctions dérivables n'est pas au programme de cette semaine.
- Fonctions réelles de classe C^1 sur un intervalle I : définition et propriétés.
 Définition des fonctions réelles de classe C^n, C^∞ sur I , où $n \in \mathbb{N}^*$, notation $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}), \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ pour l'ensemble des fonctions de classe C^n, C^∞ de I dans $\mathbb{R}$, notation $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ pour celui des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$, selon le contexte.
- Fonctions exponentielle et logarithme népérien : définition, propriétés algébriques et analytiques, courbes.
 $\ln$ et $\exp$ sont des bijections réciproques.
 Pour $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, logarithme et exponentielle de base a . Notation $\log$ pour le logarithme décimal.