PCSI 24/25 - Programme de colle de Mathématiques n° 7 : du 12 au 15 novembre 2024

Fonctions numériques réelles.

1. Partie majorée, minorée de $\mathbb{R}$. Majorant, minorant, maximum, minimum. Cas de $\mathbb{N}$.

   Une partie de $\mathbb{R}$ est bornée si elle est majorée et minorée. Caractérisation à l'aide de la valeur absolue.
2. Définition d'un segment. Propriété de convexité : une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si : $\forall (a, b) \in I^2$, $a \leqslant b \Rightarrow [a, b] \subset I$. Différents types d'intervalles.
3. Opérations sur les fonctions réelles, dont les combinaisons linéaires.
4. Révision : définition des fonctions réelles paires, impaires, périodiques sur une partie D non vide de $\mathbb{R}$. Propriétés des courbes de ces fonctions.

   Définition des fonctions (strictement) croissantes, décroissantes, monotones.
5. Si D est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une application,

   si f est strictement croissante sur D, alors $\forall (x, y) \in D^2$, $x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$;

   si f est strictement monotone, f définit une bijection dont la réciproque est strictement monotone de même monotonie stricte que f.

   Propriétés des sommes et composées de fonctions monotones.

Continuité et dérivabilité.

1. Rappels sur les fonctions continues et dérivables, définition et propriétés. Opérations, composition.
2. Pour une fonction f dérivable sur un intervalle, lien entre la monotonie de f et le signe de la dérivée de f (lien dérivée-montonie).
3. Théorème des valeurs intermédiaires : *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point. Soit f une application continue de I dans $\mathbb{R}$. Soit a et b dans I tels que $a < b$. Pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c dans $[a, b]$ tel que $\lambda = f(c)$.*

   Corollaires.
4. Théorème de la bijection (ou théorème fondamental) : *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point, et f une application de I dans $\mathbb{R}$.*

   Si f est continue et strictement monotone sur I, alors $f(I)$ est un intervalle et f définit une bijection de I dans $f(I)$, dont la réciproque est continue et strictement monotone sur $f(I)$, de même monotonie stricte que f.

   Les bornes ou extrémités de l'intervalle $f(I)$ s'obtiennent à l'aide de celles de I.

   NB : Le théorème de la bijection pour les fonctions dérivables n'est pas au programme de cette semaine.
5. Fonctions réelles de classe C^1 sur un intervalle I : définition et propriétés.

   Définition des fonctions réelles de classe C^n , C^∞ sur I, où $n \in \mathbb{N}^*$, notation $\mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$, $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ pour l'ensemble des fonctions de classe C^n , C^∞ de I dans $\mathbb{R}$, notation $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$ ou $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ pour celui des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$, selon le contexte.
6. Fonctions exponentielle et logarithme népérien : définition, propriétés algébriques et analytiques, courbes.

   ln et exp sont des bijections réciproques.

   Pour $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, logarithme et exponentielle de base a. Notation log pour le logarithme décimal.

Equations différentielles linéaires du premier ordre.

NB : Les équations différentielles linéaires du premier ordre au programme sont celles du type :

(E) : $y' + a(x)y = b(x)$, où a et b sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$, I étant un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

1. Définitions générales : équation différentielle linéaire, second membre, solution d'une équation différentielle, équation différentielle linéaire homogène (dite aussi sans second membre)
2. Théorème de structure : (E) admet des solutions sur I. La solution générale de (E) sur I est la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de l'équation homogène associée (E_0) : $y' + a(x)y = 0$.
3. Résolution de (E_0) sur l'intervalle I. Cas où a est une fonction constante.
4. Solution particulière de (E) sur l'intervalle I. Méthode de variation de la constante.

   Solution générale de $y' + a(x)y = b(x)$ sur l'intervalle I.

   Principe de superposition des solutions.

   Pour x_0 dans I et y_0 dans $\mathbb{R}$, le problème de Cauchy $\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ admet une unique solution sur I.
5. Si $c : I \to \mathbb{R}$ est continue, on sait résoudre $c(x)y' + a(x)y = b(x)$ sur tout intervalle inclus dans I sur lequel c ne s'annule jamais.

   Attention, la résolution sur I est hors programme quand c s'annule au moins une fois dans I.