PCSI 24/25 - Programme de colle de Mathématiques n° 8 : du 18 au 22 novembre 2024

Equations différentielles linéaires du premier ordre.

NB : Les équations différentielles linéaires du premier ordre au programme sont celles du type :

(E) : $y' + a(x)y = b(x)$, où a et b sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$, I étant un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

1. Définitions générales : équation différentielle linéaire, second membre, solution d'une équation différentielle, équation différentielle linéaire homogène (dite aussi sans second membre)
2. Théorème de structure : (E) admet des solutions sur I. La solution générale de (E) sur I est la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de l'équation homogène associée (E_0) : $y' + a(x)y = 0$.
3. Résolution de (E_0) sur l'intervalle I. Cas où a est une fonction constante.
4. Solution particulière de (E) sur l'intervalle I. Méthode de variation de la constante.

   Solution générale de $y' + a(x)y = b(x)$ sur l'intervalle I.

   Principe de superposition des solutions.

   Pour x_0 dans I et y_0 dans $\mathbb{R}$, le problème de Cauchy $\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ admet une unique solution sur I.
5. Si $c : I \to \mathbb{R}$ est continue, on sait résoudre $c(x)y' + a(x)y = b(x)$ sur tout intervalle inclus dans I sur lequel c ne s'annule jamais.

   Attention, la résolution sur I est hors programme quand c s'annule au moins une fois dans I.

Primitives et intégrales.

1. Primitives et intégrales de fonctions réelles continues : définition et propriétés.
2. Intégration par parties.
3. Changement de variable.

   Application au calcul d'intégrales de fonctions continues paires, impaires ou périodiques.
4. Première liste de primitives à connaître :

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}\, x^{n+1} + cste \qquad \text{sur } \mathbb{R}, \text{ avec } n \text{ fixé dans } \mathbb{N}^*,$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln(|x|) + cste \qquad \text{sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et sur } \mathbb{R}_-^*$$

$$\int \frac{1}{x^n}\, dx = \frac{-1}{n-1} \times \frac{1}{x^{n-1}} + cste \qquad \text{sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et sur } \mathbb{R}_-^*, \text{ pour } n \geqslant 2 \text{ entier},$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{x} + cste \qquad \text{sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$\int e^x\, dx = e^x + cste \qquad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$\int \cos(x)\, dx = \sin(x) + cste \qquad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$\int \sin(x)\, dx = -\cos(x) + cste \qquad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$\int \tan(x)\, dx = -\ln(|\cos(x)|) + cste \qquad \text{sur chaque intervalle } \left] -\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi \right[,$$
$$\text{où } k \text{ est quelconque dans } \mathbb{Z}.$$

$$\int \ln(x)\, dx = x\ln(x) - x + cste \qquad \text{sur } \mathbb{R}_+^*.$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \mathrm{Arctan}(x) + cste \qquad \text{sur } \mathbb{R}$$

Fonction usuelles.

1. Révisions : fonctions exponentielles et logarithmes,

   fonctions trigonométriques.
2. Fonctions trigonométriques réciproques : définitions, propriétés, courbes.