PCSI 24/25 - Programme de colle de Mathématiques n° 14 : du 13 au 17 janvier 2025

Sommes et produits de réels et complexes.

1. Sommes doubles. Règle de Fubini. Sommes triangulaires.Carré d'une somme.
2. Application aux sommes en cosinus et sinus : pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$,

   - calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$,

   - calcul de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$,

   - linéarisation de $\cos^n(x)$ et $\sin^n(x)$.
3. Racines n-ièmes d'un complexe a. Cas de 0. Cas $a \neq 0$: détermination à partir de la forme trigonométrique de a.

   Racines n-ièmes de l'unité. Forme $\exp(2ik\pi/n)$, avec $k \in \mathbb{Z}$, à connaître. Propriété fondamentale et conséquences :

   Un complexe ω différent de 1 est une racine n-ième de l'unité si, et seulement si $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$.

   Les solutions complexes de l'équation $\sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0$ sont les racines n-ièmes de l'unité distinctes de 1.

   La somme des n racines n-ièmes de l'unité est égale à 0.

Suites numériques réelles.

1. Rappel des définitions de parties de $\mathbb{R}$ majorée, minorée, bornée, de maximum et minimum.

   Borne supérieure, inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$: définition, existence pour toute partie non vide majorée, resp. non vide minorée de $\mathbb{R}$, et caractérisation (résultats admis).
   $\inf(]0, +\infty[) = 0$ (démontré), d'où le principe de démonstration : un réel a est négatif ($a \leqslant 0$) s'il est plus petit que tout réel strictement positif, et ses corollaires.
2. Densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (hors programme - admis).
3. Définition d'une suite numérique réelle comme application de A dans $\mathbb{R}$, où A est une partie infinie de $\mathbb{N}$. Notation $u = (u_n)_{n \in A}$. Ensemble $\mathbb{R}^A$.

   Les définitions et propriétés sont données pour des suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
4. Définition et propriétés des opérations sur les suites numériques réelles.
   (La structure algébrique de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'est pas au programme).

   Comparaison de deux suites : pour u et v dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $u \leqslant v$ si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$ et $u < v$ si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$.
5. Suites monotones.
   Suites majorées, minorées, bornées. Borne supérieure, inférieure, minimum, maximum d'une suite.
   Définition des suites tronquées et suites extraites.
6. Définition d'une propriété $P(n)$ dépendant d'une variable n de $\mathbb{N}$ vraie pour n assez grand (ou : à partir d'un certain rang).

   Pour $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\left]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha\right[$ (resp. $\left[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha\right]$) est l'intervalle ouvert (resp. fermé) centré en x_0 de rayon α. Ce sont des voisinages de x_0, respectivement ouvert et fermé.

   x_0 est un élément ou une borne d'un intervalle I si, et seulement si, tout voisinage de x_0 rencontre I.

   Définition d'une propriété $P(x)$ dépendant d'une variable x de $\mathbb{R}$ vraie au voisinage de x_0, de $+\infty$, de $-\infty$.
7. Droite achevée $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
8. Définition d'une suite convergente, divergente. Limite finie, infinie d'une suite. Unicité de la limite.
   Limite par valeurs supérieures, inférieures.
   Opérations sur les limites de suites réelles.
   Limite de la composée d'une suite par une fonction numérique réelle.
9. Suites extraites. Pour $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, toute suite extraite d'une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite ℓ a pour limite ℓ.
   Si les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ ont la même limite ℓ, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite ℓ
10. Limites des suites (n^b) où $b \in \mathbb{R}$.

    Cas de convergence et de divergence des suites des suites géométriques (q^n) où $q \in \mathbb{R}^*$.

    Théorèmes de croissances comparées pour les suites.
11. Théorèmes de comparaison, d'encadrement (des gendarmes), de la limite monotone.

    Si (u_n) converge vers $\ell > 0$,alors $u_n > 0$ pour n assez grand.

    Théorèmes de majoration : (u_n) converge vers 0 si et seulement si $(|u_n|)$ converge vers 0.
    Une suite produit d'une suite bornée et d'une suite convergeant vers 0 converge aussi vers 0.
    Si $|u_n| \leqslant v_n$ pour n assez grand et si (v_n) converge vers 0, alors (u_n) converge vers 0.