PCSI 24/25 - Programme de colle de Mathématiques n° 17 : du 3 au 7 février 2025

Matrices

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni des opérations usuelles.
n et p désignent des entiers naturels non nuls.

1. Définition générale d'une matrice de type (n, p) à coefficients dans $\mathbb{K}$. Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Somme de matrices, produit externe d'un scalaire et d'une matrice, produit de deux matrices.
   Propriétés des opérations. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension np.
   Matrice nulle, matrice colonne, ligne, élément, carrée.
   Transposée d'une matrice de type (n, p). Propriétés.
2. Matrices carrées. Ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Eléments diagonaux. Matrice identité d'ordre n notée I_n.
   Définition d'une matrice inversible, de son inverse. Propriétés des matrices inversibles. L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $GL_n(\mathbb{K})$ et appelé groupe linéaire d'ordre n.
   Caractérisation de $GL_2(\mathbb{K})$ à l'aide du déterminant. Inverse d'une matrice de $GL_2(\mathbb{K})$.
   Puissances d'une matrice. Formule du binôme de Newton pour deux matrices qui commutent.
   Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, A^k est inversible et $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$, notée A^{-k}, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$.
3. Définition et propriétés des matrices carrées particulières : diagonales, triangulaires (supérieures et inférieures), symétriques, antisymétriques.
   Condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice diagonale ou triangulaire soit inversible et propriétés de l'inverse le cas échéant.
4. Opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice. Matrice échelonnée par lignes.
   Algorithme du pivot de Gauss.
   Application au calcul de l'inverse d'une matrice carrée A par opérations élémentaires sur les lignes de la matrice par blocs $M = (A|I_n)$.
5. Equation linéaire, système linéaire (S) de n équations à p inconnues réelles ou complexes.
   Solution d'un système linéaire. Ensemble des solutions. Système compatible, incompatible, homogène.
   Ecriture matricielle $AX = B$, matrice associée A, des seconds membres B, des inconnues X.
   (S) est compatible si et seulement si B est combinaison linéaire des matrices colonnes de A.
   Système homogène associé (S_0), toujours compatible.
6. Théorème de structure. Si (S) est compatible, ses solutions s'obtiennent comme la somme d'une solution particulière de (S) et des solutions de (S_0).
   Deux systèmes linéaires sont équivalents si on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires. Ils ont alors le même ensemble de solutions.
   Un système linéaire est équivalent à un système dont la matrice associée est échelonnée par lignes.
   Pivots. Equations principales. Conditions de compatibilité. Inconnues principales et secondaires (ou paramètres).
   Résolution pratique avec l'algorithme du pivot de Gauss.
   Un système linéaire admet soit une infinité de solutions, soit une seule, soit aucune solution.
   Définition et propriétés des systèmes de Cramer.
7. Calcul de l'inverse d'une matrice carrée avec la résolution d'un système dont le second membre est constitué de paramètres.

Fonctions numériques réelles

NB : Dans le cours, un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point est appelé un intervalle non trivial.

1. Révisions sur les applications entre deux ensembles non vides.
   Définition et propriétés des applications injectives et surjectives.
2. Révisions à faire : applications paires et impaires, périodiques, monotones, fonctions usuelles.
3. Pour une partie D non vide de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une application,
   si f est strictement croissante sur D, alors $\forall (x, y) \in D^2$, $x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$;
   si f est monotone et injective, alors f est strictement monotone ;
   si f est strictement monotone, alors f est injective ;
   si f est strictement monotone, f définit une bijection dont la réciproque est strictement monotone de même monotonie que f.
4. Pour D partie non vide de $\mathbb{R}$, rappel des définitions des opérations sur $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$.
   Application majorée (respectivement minorée) et borne supérieure (respectivement inférieure) d'une application majorée (respectivement minorée). Application bornée.
   Maximum et minimum, maximum local et minimum local d'une application.
   Définition de $f \leqslant g$, $f < g$, $f \geqslant 0$, $|f|$, $\sup(f, g)$ ou $\max(f, g)$, $\inf(f, g)$ ou $\min(f, g)$ pour f et g dans $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$.

5. Limite finie, infinie, d'une application en un réel ou à l'infini. Unicité.
   Caractérisation séquentielle.
   Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, inverse. Composition.

   Si f a une limite finie ℓ en $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, alors f est bornée au voisinage de x_0 ; $|f|$ a pour limite $|\ell|$ en x_0.
   Si $\ell > 0$ alors $f(x) > 0$ pour x au voisinage de x_0.

   Limite à droite et à gauche, par valeurs supérieures et inférieures.
6. Théorèmes de comparaison et d'encadrement. Théorème de la limite monotone.
7. Limites à connaître : $\dfrac{\sin(x)}{x}$, $\dfrac{\tan(x)}{x}$, $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$, $\dfrac{e^x-1}{x}$, $\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{x}$ quand x tend vers 0.

   Théorèmes de croissances comparées : pour a, b et λ dans $\mathbb{R}_+^*$,

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^a}{x^b} = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} (|\ln(x)|)^a x^b = 0^+ \ ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{e^{\lambda x}} = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} |x|^b e^{\lambda x} = 0^+.$$