PCSI 24/25 - Programme de colle de Mathématiques n° 18 : du 10 au 14 février 2025

Fonctions numériques réelles

NB : - Dans le cours, un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point est appelé un intervalle non trivial.
- Les équivalents de fonctions seront au prochain programme de colle.
Si votre interrogateur vous l'autorise, vous pourrez les utiliser dès le présent programme.

1. Révisions sur les applications entre deux ensembles non vides.
   Définition et propriétés des applications injectives et surjectives.
2. Révisions à faire : applications paires et impaires, périodiques, monotones, fonctions usuelles.
3. Pour une partie D non vide de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une application,
   si f est strictement croissante sur D, alors $\forall (x, y) \in D^2$, $x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$;
   si f est monotone et injective, alors f est strictement monotone ;
   si f est strictement monotone, alors f est injective ;
   si f est strictement monotone, f définit une bijection dont la réciproque est strictement monotone de même monotonie que f.
4. Pour D partie non vide de $\mathbb{R}$, rappel des définitions des opérations sur $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$.
   Application majorée (respectivement minorée) et borne supérieure (respectivement inférieure) d'une application majorée (respectivement minorée). Application bornée.
   Maximum et minimum, maximum local et minimum local d'une application.
   Définition de $f \leqslant g$, $f < g$, $f \geqslant 0$, $|f|$, $\sup(f, g)$ ou $\max(f, g)$, $\inf(f, g)$ ou $\min(f, g)$ pour f et g dans $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$.
5. Limite finie, infinie, d'une application en un réel ou à l'infini. Unicité.
   Caractérisation séquentielle.
   Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, inverse. Composition.

   Si f a une limite finie ℓ en $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, alors f est bornée au voisinage de x_0 ; $|f|$ a pour limite $|\ell|$ en x_0.
   Si $\ell > 0$ alors $f(x) > 0$ pour x au voisinage de x_0.

   Limite à droite et à gauche, par valeurs supérieures et inférieures.
6. Théorèmes de comparaison et d'encadrement. Théorème de la limite monotone.
7. Limites à connaître : $\dfrac{\sin(x)}{x}$, $\dfrac{\tan(x)}{x}$, $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$, $\dfrac{e^x - 1}{x}$, $\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{x}$ quand x tend vers 0.

   Théorèmes de croissances comparées : pour a, b et λ dans $\mathbb{R}_+^*$,
   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^a}{x^b} = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} (|\ln(x)|)^a x^b = 0^+ \ ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{e^{\lambda x}} = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} |x|^b e^{\lambda x} = 0^+.$$
8. Continuité d'une application en un point d'un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$.
   Prolongement par continuité. Continuité à droite et à gauche. Propriétés.
9. Rappels : Continuité sur un intervalle non trivial I de $\mathbb{R}$.
   Opérations et composition.
   Théorème des valeurs intermédiaires.
   L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.
   Théorème de la bijection : si une fonction réelle f est continue et strictement monotone sur un intervalle I non vide et non réduit à un point, alors $f(I)$ est un intervalle et f réalise une bijection de I dans $f(I)$, dont la réciproque est continue et strictement monotone sur $f(I)$, de même monotonie que f.
   Compléments : Continuité à droite et à gauche sur I.
   L'image d'un segment par une application continue est un segment.
   Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.