PCSI 24/25 - Programme de colle de Mathématiques n° 19 : du 3 au 7 mars 2025

Fonctions numériques réelles

NB : - Dans le cours, un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point est appelé un intervalle non trivial.

1. Continuité d'une application en un point d'un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$.
   Prolongement par continuité. Continuité à droite et à gauche. Propriétés.
2. Rappels : Continuité sur un intervalle non trivial I de $\mathbb{R}$.
   Opérations et composition.
   Théorème des valeurs intermédiaires.
   L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.
   Théorème de la bijection : si une fonction réelle f est continue et strictement monotone sur un intervalle I non vide et non réduit à un point, alors $f(I)$ est un intervalle et f réalise une bijection de I dans $f(I)$, dont la réciproque est continue et strictement monotone sur $f(I)$, de même monotonie que f.
   Compléments : Continuité à droite et à gauche sur I.
   L'image d'un segment par une application continue est un segment.
   Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.
3. Relations de domination, de prépondérance et d'équivalence au voisinage d'un point ou de l'infini : définitions, propriétés et opérations.
   Négligeabilités usuelles au voisinage de $+\infty$ à partir des théorèmes de croissances comparées.
   Equivalents à connaître : fonctions polynômes en 0 et à l'infini ;

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x\,; \qquad \tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x\,; \qquad \mathrm{Arcsin}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x\,; \qquad \mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x\,; \qquad e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x\,; \qquad \mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x\,; \qquad \sqrt[n]{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{n}, \text{ pour } n \geqslant 2 \text{ dans } \mathbb{N}$$

$$\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}\,; \qquad \mathrm{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}\,; \qquad \ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x - 1. \qquad \mathrm{ch}(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}\,; \qquad \mathrm{sh}(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}.$$

Fonctions dérivables.

Dans ce qui suit, f désigne une fonction réelle définie sur un intervalle I non trivial de $\mathbb{R}$ et x_0 un élément de I.

1. Définition de la dérivabilité (- à droite, - à gauche) d'une fonction en un réel. Interprétation graphique.
   f est dérivable en x_0 si et seulement si il existe des réels a et b et une application φ de I dans $\mathbb{R}$ tels que $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$ et $\forall x \in I, f(x) = a + b(x - x_0) + (x - x_0)\varphi(x)$. Dans ce cas $a = f(x_0)$ et $b = f'(x_0)$.
   Conséquence : Une application dérivable en un réel est continue en ce réel.
2. Opérations sur les dérivées. Composition d'applications dérivables et valeur de la dérivée.
   Lien entre extremum local et dérivée : si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en un point intérieur x_0 de l'intervalle I et si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.
3. Fonction dérivable sur un intervalle, fonction dérivée. Propriétés.
   Théorème de la bijection pour les fonctions dérivables.
4. Théorème de Rolle - Théorème des accroissements finis.
   Inégalité des accroissements finis et fonctions lipschitziennes.
   Lien entre la monotonie et le signe de la dérivée d'une fonction continue sur un intervalle I et dérivable sur l'ensemble $\mathring{I}$ de ses points intérieurs.
5. Théorème de la limite de la dérivée : Si f est continue sur l'intervalle I, et si f est dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$ alors
   i) si $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$.
   ii) si $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ vaut $+\infty$ ou $-\infty$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ vaut $+\infty$ ou $-\infty$ respectivement, et la courbe de f a une tangente verticale au point d'abscisse x_0.
   Corollaire : Si f est continue sur l'intervalle I, si f est de classe C^1 sur $I \setminus \{x_0\}$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$,
   alors f est dérivable en x_0, $f'(x_0) = \ell$ et f est de classe C^1 sur I.
6. Dérivées d'ordres supérieurs. Pour $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, applications de classe C^n.
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, opérations, formule de Leibniz, composition, théorème de la bijection pour les fonctions n fois dérivables, de classe C^n, C^∞.
7. Fonctions convexes, définition et interprétation géométrique.
   Caractérisations lorsque la fonction est dérivable, deux fois dérivable et interprétation géométrique.
   Fonctions concaves.
8. Définition d'un point d'inflexion.
   Si f est deux fois dérivable en x_0 et si f a un point d'inflexion en x_0, alors $f''(x_0) = 0$.
   Si f est deux fois dérivable au voisinage de x_0 et si $f''(0)$ s'annule en changeant de signe en x_0, alors f a un point d'inflexion en x_0. f est alors soit convexe puis concave, soit concave puis convexe au voisinage de x_0.