PCSI 24/25 - Programme de colle de Mathématiques n° 20 : du 10 au 14 mars 2025

Fonctions numériques réelles

NB : - Dans le cours, un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point est appelé un intervalle non trivial.

1. Relations de domination, de prépondérance et d'équivalence au voisinage d'un point ou de l'infini : définitions, propriétés et opérations.
   Négligeabilités usuelles au voisinage de $+\infty$ à partir des théorèmes de croissances comparées.
   Equivalents à connaître : fonctions polynômes en 0 et à l'infini ;

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x\,; \quad \tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x\,; \quad \mathrm{Arcsin}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x\,; \quad \mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x\,; \quad e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x\,; \quad \mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x\,; \quad \sqrt[n]{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{n}, \text{ pour } n \geqslant 2 \text{ dans } \mathbb{N}$$

$$\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}\,; \quad \mathrm{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}\,; \quad \ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x - 1. \quad \mathrm{ch}(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}\,; \quad \mathrm{sh}(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}.$$

Fonctions dérivables.

Dans ce qui suit, f désigne une fonction réelle définie sur un intervalle I non trivial de $\mathbb{R}$ et x_0 un élément de I.

1. Définition de la dérivabilité (- à droite, - à gauche) d'une fonction en un réel. Interprétation graphique.
   f est dérivable en x_0 si et seulement si il existe des réels a et b et une application φ de I dans $\mathbb{R}$ tels que $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$ et $\forall x \in I, f(x) = a + b(x - x_0) + (x - x_0)\varphi(x)$. Dans ce cas $a = f(x_0)$ et $b = f'(x_0)$.
   Conséquence : Une application dérivable en un réel est continue en ce réel.
2. Opérations sur les dérivées. Composition d'applications dérivables et valeur de la dérivée.
   Lien entre extremum local et dérivée : si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en un point intérieur x_0 de l'intervalle I et si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.
3. Fonction dérivable sur un intervalle, fonction dérivée. Propriétés.
   Théorème de la bijection pour les fonctions dérivables.
4. Théorème de Rolle - Théorème des accroissements finis.
   Inégalité des accroissements finis et fonctions lipschitziennes.
   Lien entre la monotonie et le signe de la dérivée d'une fonction continue sur un intervalle I et dérivable sur l'ensemble $\mathring{I}$ de ses points intérieurs.
5. Théorème de la limite de la dérivée : Si f est continue sur l'intervalle I, et si f est dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$ alors
   i) si $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$.
   ii) si $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ vaut $+\infty$ ou $-\infty$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ vaut $+\infty$ ou $-\infty$ respectivement, et la courbe de f a une tangente verticale au point d'abscisse x_0.
   Corollaire : Si f est continue sur l'intervalle I, si f est de classe C^1 sur $I \setminus \{x_0\}$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en x_0, $f'(x_0) = \ell$ et f est de classe C^1 sur I.
6. Dérivées d'ordres supérieurs. Pour $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, applications de classe C^n.
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, opérations, formule de Leibniz, composition, théorème de la bijection pour les fonctions n fois dérivables, de classe C^n, C^∞.
7. Fonctions convexes, définition et interprétation géométrique.
   Caractérisations lorsque la fonction est dérivable, deux fois dérivable et interprétation géométrique.
   Fonctions concaves.
8. Définition d'un point d'inflexion.
   Si f est deux fois dérivable en x_0 et si f a un point d'inflexion en x_0, alors $f''(x_0) = 0$.
   Si f est deux fois dérivable au voisinage de x_0 et si $f''(0)$ s'annule en changeant de signe en x_0, alors f a un point d'inflexion en x_0. f est alors soit convexe puis concave, soit concave puis convexe au voisinage de x_0.

Développements limités.

En questions de cours uniquement cette semaine : développements limités à connaître :

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{x \to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) \underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

$$\mathrm{Arctan}(x) \underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\mathrm{ch}(x) \underset{x \to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\mathrm{sh}(x) \underset{x \to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos(x) \underset{x \to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin(x) \underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\tan(x) \underset{x \to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

Pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

$$(1+x)^\alpha \underset{x \to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} \underset{x \to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3) \qquad \big(\alpha = 1/2 \text{ dans } (1+x)^\alpha\big)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x \to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3) \qquad \big(\alpha = -1/2 \text{ dans } (1+x)^\alpha\big)$$