Développements limités.

1. Définition de développement limité à l'ordre n en $x_0 \in \mathbb{R}$ pour n quelconque dans $\mathbb{N}$.

Unicité, troncature. Lien avec l'équivalence.

Une fonction qui a un développement limité en un réel est prolongeable par continuité ou est continue en ce réel.

Une fonction a un développement limité à l'ordre 1 en un réel si, et seulement si elle est dérivable en ce réel (après prolongement par continuité si nécessaire).

2. Formule de Taylor-Young pour $n \in \mathbb{N}^*$ et une fonction f de classe C^n sur un intervalle non trivial I en $x_0 \in I$:

f a un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 et

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),$$

$$f(x_0 + t) \underset{t \rightarrow 0}{=} f(x_0) + f'(x_0)t + \frac{f''(x_0)}{2}t^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}t^n + o(t^n)$$

Si $x_0 = 0$, $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$.

3. f a un développement limité à l'ordre n en x_0 si, et seulement si, $g : t \mapsto f(x_0 + t)$ a un développement limité à l'ordre n en 0. Lien entre les deux développements limités. Forme normalisée d'un développement limité.

4. Somme et produit de développements limités.

5. Opérations sur les développements limités, composition.

En 0, développement limité de $x \mapsto f(-x)$ et lien des développements limités avec la parité des fonctions.

Attention : la division selon les puissances croissantes est hors programme.

6. Intégration et dérivation de développements limités en x_0 .

7. Exemples de développement limité à gauche et à droite, d'un quotient de dénominateur de limite nulle, d'une fonction réciproque.

8. Développement asymptotique d'une fonction non bornée au voisinage d'un réel x_0 (uniquement avec des puissances entières de $x - x_0$).

9. Application des développements limités à la détermination de la tangente et de la position de la courbe par rapport à la tangente en un point.

10. Asymptote verticale.

Asymptote horizontale, oblique. Position de la courbe par rapport à cette asymptote à l'aide d'un développement asymptotique au voisinage de l'infini.

Développement asymptotique au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ (uniquement avec des puissances entières de x).

Notion de branche parabolique de direction l'axe des abscisses ou des ordonnées (hors programme de PCSI).

Développements limités à connaître, n étant un entier naturel non nul .

$$\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n)$$

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

$$\text{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\text{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\text{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

Pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

$$(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3) \quad (\alpha = 1/2 \text{ dans } (1+x)^\alpha)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3) \quad (\alpha = -1/2 \text{ dans } (1+x)^\alpha)$$

$$\operatorname{Argth}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^5)$$

$$\operatorname{Arcsin}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$$

$$\operatorname{Arccos}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$$