PCSI 24/25 - Programme de colle de Mathématiques n° 23 : du 31 mars au 4 avril 2025

Développements limités.

1. Développement asymptotique d'une fonction non bornée au voisinage d'un réel x_0 (uniquement avec des puissances entières de $x - x_0$).
2. Application des développements limités à la détermination de la tangente et de la position de la courbe par rapport à la tangente en un point.
3. Asymptote verticale.
   Asymptote horizontale, oblique. Position de la courbe par rapport à cette asymptote à l'aide d'un développement asymptotique au voisinage de l'infini.
   Développement asymptotique au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ (uniquement avec des puissances entières de x).
   Notion de branche parabolique de direction l'axe des abscisses ou des ordonnées (hors programme de PCSI).

Développements limités à connaître, n étant un entier naturel non nul .

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

$$\mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

Pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3) \qquad \big(\alpha = 1/2 \text{ dans } (1+x)^\alpha\big)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3) \qquad \big(\alpha = -1/2 \text{ dans } (1+x)^\alpha\big)$$

$$\mathrm{Argth}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^5)$$

$$\mathrm{Arcsin}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$$

$$\mathrm{Arccos}(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$$

Polynômes.

$\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Définition des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ sous la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \cdots, a_n$ dans $\mathbb{K}$. ou sous la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ avec a_k nul pour k assez grand.
   X est l'indéterminée des polynômes.
   Définition de monôme.
   Notation $\mathbb{K}[X]$ de l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
   Egalité de deux polynômes. Polynôme nul. Fonction polynomiale associée à un polynôme.
2. Degré d'un polynôme, coefficient dominant, coefficient constant. Polynôme unitaire ou normalisé.
   Le polynôme nul a pour degré $-\infty$.
   Un polynôme constant P de valeur a est noté $P = aX^0$ ou $P = a$. Son degré est 0 s'il est non nul.
   Pour n dans $\mathbb{N}$, définition de $\mathbb{K}_n[X]$.
3. Opérations sur $\mathbb{K}[X]$: somme et produit de deux polynômes, produit d'un scalaire et d'un polynôme.
   Degré des polynômes obtenus.
   Les polynômes inversibles sont les polynômes de degré 0.
   Tout polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$ est régulier pour le produit.
   Puissances de polynômes. Propriétés dont la formule du binôme de Newton dans $\mathbb{K}[X]$ et la factorisation de $A^n - B^n$ par $A - B$ pour $n \geqslant 2$ dans $\mathbb{N}$. Cas de $X^n - 1$.
   Polynômes composés.
   Lien avec les fonctions polynômes.
4. Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$. Multiple d'un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Propriétés de la division des polynômes.
   Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$. Division suivant les puissances décroissantes pour trouver le quotient et le reste de la division euclidienne.
5. Polynôme dérivé, polynôme dérivé d'ordre k d'un polynôme P, pour $k \in \mathbb{N}^*$.
   Notation $P^{(k)}$, convention $P^{(0)} = P$.
   Propriétés de la dérivation dont la formule de Leibniz pour les polynômes.
   Polynômes dérivés de X^n et de $(X - a)^n$ pour a dans $\mathbb{K}$ et n dans $\mathbb{N}^*$.
   Formules de Taylor pour les polynômes.
6. Racine x_0 d'un polynôme. Caractérisation avec la divisibilité par $X - x_0$.
   Tout polynôme non nul de degré n admet au plus n racines distinctes. Multiplicité d'une racine. Détermination de la multiplicité à l'aide de divisions euclidiennes ou des polynômes dérivés.
7. Polynôme scindé sur $\mathbb{K}$. Expressions de la somme et du produit des racines d'un polynôme scindé en fonction de ses coefficients. Relations dans le cas d'un polynôme de degré 2. Cas des polynômes du second degré.
8. Polynôme irréductible dans $\mathbb{K}[X]$. Théorème de d'Alembert-Gauss (admis).
   Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$.
   Décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.
   Décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ des polynômes $X^n - 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} X^k$ pour $n \geqslant 2$ dans $\mathbb{N}$.
9. Notion de fraction rationnelle, forme réduite, degré, zéros et pôles. Notation $\mathbb{K}(X)$.
   Opérations dans $\mathbb{K}(X)$. Dérivée d'une fraction rationnelle.
   Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles à pôles simples.
   N.B. : Selon le programme, dans le cas où le dénominateur possède une racine multiple ou un facteur irréductible de degré 2, la forme cherchée doit être fournie.