

Pensez à déplacer la colle du jeudi !

Polynômes

- Polynôme dérivé, polynôme dérivé d'ordre k d'un polynôme P , pour $k \in \mathbb{N}^*$.
Notation $P^{(k)}$, convention $P^{(0)} = P$.
Propriétés de la dérivation dont la formule de Leibniz pour les polynômes.
Polynômes dérivés de X^n et de $(X - a)^n$ pour a dans $\mathbb{K}$ et n dans $\mathbb{N}^*$.
Formules de Taylor pour les polynômes.
- Racine x_0 d'un polynôme. Caractérisation avec la divisibilité par $X - x_0$.
Tout polynôme non nul de degré n admet au plus n racines distinctes. Multiplicité d'une racine. Détermination de la multiplicité à l'aide de divisions euclidiennes ou des polynômes dérivés.
- Polynôme scindé sur $\mathbb{K}$. Expressions de la somme et du produit des racines d'un polynôme scindé en fonction de ses coefficients. Relations dans le cas d'un polynôme de degré 2. Cas des polynômes du second degré.
- Polynôme irréductible dans $\mathbb{K}[X]$. Théorème de d'Alembert-Gauss (admis).
Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$.
Décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ des polynômes $X^n - 1$ et $\sum_{k=0}^{n-1} X^k$ pour $n \geq 2$ dans $\mathbb{N}$.
- Notion de fraction rationnelle, forme réduite, degré, zéros et pôles. Notation $\mathbb{K}(X)$.
Opérations dans $\mathbb{K}(X)$. Dérivée d'une fraction rationnelle.
Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles à pôles simples.
N.B. : Selon le programme, dans le cas où le dénominateur possède une racine multiple ou un facteur irréductible de degré 2, la forme cherchée doit être fournie.

Espaces vectoriels.

- Définitions et premières propriétés d'un espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ sur $\mathbb{K}$. Espaces vectoriels de référence.
Espace vectoriel produit. Si X est un ensemble non vide, $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathcal{F}(X, E)$.
- Sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $(E, +, \cdot)$, définition, caractérisation et propriétés.
- Si S est une famille finie de vecteurs de E , l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de S est noté $\text{Vect}(S)$.
C'est un sous-espace vectoriel de E , le plus petit contenant tous les vecteurs de S , au sens de l'inclusion.
Sous espace engendré par une partie A non vide de E .
Exemple de la droite vectorielle $\mathbb{K}\vec{a} = \{\lambda\vec{a} \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ pour $\vec{a} \neq \vec{0}$ dans E : $\mathbb{K}\vec{a} = \text{Vect}(\vec{a})$.
- Somme $F + G$ de deux sous-espaces vectoriels F et G de E . Somme directe de sous-espaces vectoriels. Sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E , caractérisation.
- $(E, +, \cdot)$ et $(F, +, \cdot)$ étant des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, définition d'une application linéaire de E dans F .
Définition d'isomorphisme, endomorphisme, automorphisme, forme linéaire.
Notation $L(E, F)$, $L(E)$, $GL(E)$ (groupe linéaire).
Noyau et image : définitions et propriétés.
Image et image réciproque de sous-espaces vectoriels par une application linéaire.
 $L(E, F)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Composée d'applications linéaires. La composition est interne dans $L(E)$.
La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme. Espaces vectoriels isomorphes.
Composition d'isomorphismes. Propriétés de $GL(E)$.
- Sous et sur-familles d'une famille finie de vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .
Famille génératrice finie d'un sous-espace vectoriel. Propriétés.
Famille finie libre, liée. Propriétés.

Définition d'une base d'un sous-espace vectoriel F de E comme famille finie libre et génératrice de F .
Caractérisation : une famille finie S de vecteurs d'un sous-espace vectoriel F de E est une base de F si et seulement si chaque vecteur de F s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de S .
Coordonnées d'un vecteur dans une base.