PCSI 24/25 - Programme de colle de Mathématiques n° 26 : du 5 au 9 mai 2025

Pensez à déplacer la colle du jeudi !

Espaces vectoriels.

1. Définitions et premières propriétés d'un espace vectoriel $(E, +, .)$ sur $\mathbb{K}$. Espaces vectoriels de référence.
   Espace vectoriel produit. Si X est un ensemble non vide, $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(X, E)$.
2. Sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E, +, .)$, définition, caractérisation et propriétés.
3. Si S est une famille finie de vecteurs de E, l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de S est noté $\text{Vect}(S)$.
   C'est un sous-espace vectoriel de E, le plus petit contenant tous les vecteurs de S, au sens de l'inclusion.
   Sous espace engendré par une partie A non vide de E.
   Exemple de la droite vectorielle $\mathbb{K}\vec{a} = \{\lambda\vec{a} \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ pour $\vec{a} \neq \vec{0}$ dans E : $\mathbb{K}\vec{a} = \text{Vect}(\vec{a})$.
4. Somme $F + G$ de deux sous-espaces vectoriels F et G de E. Somme directe de sous-espaces vectoriels. Sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E, caractérisation.
5. $(E, +, .)$ et $(F, +, .)$ étant des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, définition d'une application linéaire de E dans F.
   Définition d'isomorphisme, endomorphisme, automorphisme, forme linéaire.
   Notation $L(E, F)$, $L(E)$, $GL(E)$ (groupe linéaire).
   Noyau et image : définitions et propriétés.
   Image et image réciproque de sous-espaces vectoriels par une application linéaire.
   $L(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Composée d'applications linéaires. La composition est interne dans $L(E)$.
   La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme. Espaces vectoriels isomorphes.
   Composition d'isomorphismes. Propriétés de $GL(E)$.
6. Sous et sur-familles d'une famille finie de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
   Famille génératrice finie d'un sous-espace vectoriel. Propriétés.
   Famille finie libre, liée. Propriétés.

   Définition d'une base d'un sous-espace vectoriel F de E comme famille finie libre et génératrice de F.
   Caractérisation : une famille finie S de vecteurs d'un sous-espace vectoriel F de E est une base de F si et seulement si chaque vecteur de F s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de S.
   Coordonnées d'un vecteur dans une base.

Intégrale d'une fonction continue.

1. Subdivision d'un segment, fonction en escalier et intégrale d'une fonction en escalier sur un segment de $\mathbb{R}$.
   Propriétés de l'intégrale : linéarité, positivité, croissance, la valeur absolue de l'intégrale est majorée par l'intégrale de la valeur absolue.
2. Intégrale d'une fonction continue sur un segment.
   Définition de la valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment.
   Linéarité, positivité, croissance. La valeur absolue de l'intégrale est majorée par l'intégrale de la valeur absolue.
   Relation de Chasles. Inégalité de Cauchy-Schwarz.
3. Une fonction f continue et de signe constant sur un segment $[a, b]$ est nulle sur $[a, b]$ si $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$. Corollaires.
4. Somme de Riemann pour une subdivision régulière.
   Dans le cas d'une fonction continue, convergence vers l'intégrale quand le pas tend vers 0.
5. Rappels : Pour une fonction f continue sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}$, pour a dans I, $F_a : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est définie, continue et dérivable sur I et $F_a' = f$ sur I. C'est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.
   Les primitives de f sont égales entre elles à une constante additive près. Primitives des fonctions usuelles.

   Calcul d'intégrales à l'aide de primitives, intégration par parties. Intégration d'un développement limité.
6. Changement de variable.
7. Formule de Taylor avec reste intégral. Inégalité de Taylor-Lagrange.
8. Intégrale d'une fonction continue à valeurs complexes, propriétés.
9. Valeur approchée d'une intégrale par la méthode des rectangles, des trapèzes.
   Domination de l'erreur dans le cas de fonctions de classe C^1 et C^2 respectivement.